泛函分析笔记

作者：吕浩哲（Lucas Shen）

时间：January 12, 2026

封面：https://www.pixiv.net/artworks/100631860

悟已往之不谏，知来者之可追。——陶渊明

目录

第 1 章　度量空间　1

1.1　压缩映像原理　1

1.1.1　基本概念　1

1.1.2　压缩映像原理　2

1.2　完备化　3

1.3　紧性　5

1.4　赋范向量空间　8

1.4.1　赋范空间　8

1.4.2　商空间　11

1.4.3　内积空间　13

1.4.4　最佳逼近元　15

1.4.5　Hilbert 空间的同构　17

1.4.6　Fourier 级数的收敛　17

第 2 章　线性算子与线性泛函　19

2.1　线性算子　19

2.2　Riesz 表示定理及其应用　20

2.3　Baire 纲定理　21

2.3.1　Baire 纲定理　21

2.3.2　纲推理　22

2.4　三大定理　23

2.4.1　共鸣定理/一致有界原理　23

2.4.2　开映射定理　24

2.4.3　闭图像定理　26

2.5　Hahn-Banach 定理　27

2.5.1　实复向量空间形式　27

2.5.2　几何形式：凸集分离定理　30

2.5.3　一些应用　33

2.6　对偶空间 (共轭空间)　34

2.6.1　自反空间　36

2.6.2　共轭算子　38

2.7　弱收敛与弱 * 收敛　39

2.8　谱理论　41

第 3 章　紧算子　46

3.1　紧算子　46

3.1.1　紧算子的性质　46

3.2　紧算子的谱　49

3.2.1　Riesz-Fredholm 理论　49

3.2.2　紧算子的谱　51

3.3　Hilbert-Schmidt 定理　53

3.3.1　Hilbert 空间上的对称紧算子　54

第 4 章 Banach 代数 **56**
4.1 Banach 代数 56
4.2 Gelfand 表示 57
4.2.1 含幺 Banach 代数的极大理想 57
4.2.2 Gelfand 表示 58
4.2.3 Gelfand 拓扑 59
4.3 Banach 代数中的谱 60
4.3.1 Gelfand 表示的讨论 62
4.4 一些例子 63
4.5 C^* 代数 64
4.5.1 C^* 代数 64
4.5.2 Gelfand-Naimark 定理 65

附录 A 附录 **66**
A.1 度量空间 66
A.2 弱 * 拓扑与弱 * 收敛 67
A.3 Stone-Weierstrass 定理 69

第 1 章 度量空间

1.1 压缩映像原理

1.1.1 基本概念

定义 1.1 (度量空间)

对于集合 X，定义其上的距离函数 $d: X\times X\to\mathbb{R}$ 满足

1. 非负：$d(x,y)\geqslant 0$，当且仅当 $x=y$ 时取等.
2. 对称：$d(x,y)=d(y,x)$.
3. 三角不等式：$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$.

则称 (X,d) 为度量空间（或距离空间）.

♣

注 对于度量空间 (X,d)，考虑子集 $Y\subset X$，则 $(Y,d|_Y)$ 称为度量子空间.

例 1.1 $\mathbb{R}^n$ 在欧式度量 d 下为度量空间，d 也称为 $\mathbb{R}^n$ 上的标准度量.

例 1.2 设 $C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上连续函数的集合，则

$$d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)| \tag{1.1}$$

是一个距离函数，故 $(C[a,b],d)$ 是一个度量空间，这称为 $C[a,b]$ 上的标准度量.

定义 1.2 (收敛)

设 (X,d) 为度量空间，$\{x_n\}\subset X$，若存在 $x\in X$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x)=0, \tag{1.2}$$

则称 $\{x_n\}$ 收敛到 x.

♣

定义 1.3 (开集与闭集)

设 (X,d) 为度量空间，$E\subset X$，若对任意 $x\in E$，存在 $r_x>0$ 使得 $B(x,r_x)\subset E$，则称 E 为 X 中的开集. 称 E 为 X 中的闭集，若 E^c 为 X 中的开集.

♣

设 $\mathcal{T}$ 为 X 中所有开集的全体，称为 X **的拓扑**，它有如下性质：

命题 1.1

1. $\emptyset, X\in\mathcal{T}$.
2. $\mathcal{T}$ 对任意并封闭.
3. $\mathcal{T}$ 对有限交封闭.

♠

定义 1.4 (接触点与极限点（聚点）)

设 (X,d) 为度量空间，$E\subset X, x_0\in X$.

1. 若对任意 $\varepsilon>0$，$B(x_0,\varepsilon)\cap E\neq\emptyset$，则称 x_0 为 E 的一个接触点.
2. 若对任意 $\varepsilon>0$，$B(x_0,\varepsilon)\cap(E\backslash\{x_0\})\neq\emptyset$，则称 x_0 为 E 的一个聚点（或极限点）.

♣

注 对于 $E\subset X$，定义 E 的所有接触点的全体为 $\overline{E}$，称为 E 的**闭包**.

推论 1.1

$E \subset X$ 为闭集当且仅当 $E = \overline{E}$，当且仅当对任意 E 中的收敛点列 $\{x_n\}$，其极限 $x_0 \in E$.

定义 1.5 (稠密与可分)

设 (X, d) 为度量空间，若 $E \subset X$ 满足 $\overline{E} = X$，则称 E 在 X 中稠密. 若 X 有可数稠密子集，则称 X 可分.

例 1.3 在标准度量下，$\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，$P[a,b]$（$[a,b]$ 上的多项式）在 $C[a,b]$ 中稠密.

定义 1.6 (连续性)

设 $(X, d), (Y, \rho)$ 为度量空间，称 $T : X \to Y$ 在 $x_0 \in X$ 处连续，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(Tx, Tx_0) < \varepsilon. \tag{1.3}$$

若 T 在 X 中每一点连续，则称 $T : X \to Y$ 连续.

命题 1.2

1. 映射 $T : X \to Y$ 连续当且仅当对任意开集 $U \subset Y$，$T^{-1}(U)$ 为 X 中的开集.
2. (Heine) 映射 $T : X \to Y$ 在 x_0 处连续当且仅当对任意收敛到 x_0 的点列 $\{x_n\} \subset X$ 有 $T(x_n) \to T(x_0)$.

定义 1.7 (Cauchy 列与完备性)

称 $\{x_n\}$ 为 X 中的 Cauchy 列，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，对任意 $m, n > N$ 都有 $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. 称度量空间 (X, d) 完备，若 X 中的 Cauchy 列均收敛.

例 1.4 $(\mathbb{R}, d)$ 完备，$(\mathbb{Q}, d)$ 不完备.

例 1.5 L^p 空间是完备的（Riesz-Fischer 定理），$(C[0,1], d)$ 也是完备的，但 $(C[0,1], \rho_1)$ 不完备，这里

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \mathrm{d}t. \tag{1.4}$$

因为其极限函数可能不连续.

1.1.2 压缩映像原理

定义 1.8 (不动点)

对于映射 $T : X \to X$，称满足 $T(x_0) = x_0$ 的点 $x_0 \in X$ 为 T 的不动点.

定义 1.9 (压缩映射)

设 (X, d) 为度量空间，称 $T : X \to X$ 为压缩映射，若存在 $\alpha \in (0, 1)$，对任意 $x, y \in X$ 有 $d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y)$.

定理 1.1 (Banach 不动点定理/压缩映像原理)

完备度量空间到自身的压缩映射有唯一不动点.

证明 设 (X, d) 为完备度量空间，T 为其上的压缩映射，$\alpha \in (0, 1)$ 为系数. 任取 $x_0 \in X$，构造点列 $x_{n+1} = Tx_n$，则

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha d(x_n, x_{n-1}) \leqslant \cdots \leqslant \alpha^n d(x_1, x_0) \tag{1.5}$$

$$d(x_{n+p}, x_n) \leqslant (\alpha^{n+p-1} + \cdots + \alpha^n) d(x_1, x_0) \tag{1.6}$$

$$\leqslant \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_1, x_0), \tag{1.7}$$

故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，由完备性可知存在极限 x_0，则对 $x_{n+1}=Tx_n$ 两边取极限可知 x_0 为 T 的不动点. 假设还有另一个不动点 x'，则

$$d(x_0,x')=d(Tx_0,Tx')\leqslant \alpha d(x_0,x'), \tag{1.8}$$

故 $x_0=x'$，唯一性得证.

1.2 完备化

定义 1.10 (等距映射)

对于度量空间 $(X_1,d_1),(X_2,d_2)$，若映射 $T:X_1\to X_2$ 满足

$$d_1(x,y)=d_2(Tx,Ty), \tag{1.9}$$

则称 T 为等距映射. ♣

注 若 T 为单射，则称之为一个**等距嵌入**；若 T 为双射，则称之为一个**等距同构**，此时也称 X_1,X_2（等距）同构，易知这是一个等价关系.

定义 1.11 (完备化)

对于度量空间 (X,d)，若存在完备度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$，其存在一个稠密子空间 $(X_0,\tilde{d})$ 与 (X,d) 同构，则称 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 为 (X,d) 的一个完备化. ♣

例 1.6

1. $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{Q}$ 的完备化.
2. $(L^1[a,b],\rho_1)$ 是 $(C[a,b],\rho_1)$ 的完备化.
3. $(C[a,b],d)$ 是 $(P[a,b],d)$ 的完备化（P 表示多项式集合）.

定理 1.2

任何度量空间都有完备化，且它们在（等距）同构意义下唯一. ♡

设 (X,d) 为度量空间，定理的证明与有理数的完备化过程类似，分为如下步骤：

1. 构造更大的度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$.
2. 构造稠密子空间 $(X_0,\tilde{d})\cong(X,d)$.
3. 证明 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 完备.
4. 证明唯一性.

证明 Step 1. 构造更大的度量空间 $(\tilde{X},\tilde{d})$.

令 $\mathcal{F}$ 为 (X,d) 中所有 Cauchy 列的全体，引入等价关系：

$$\{x_n\}\sim\{y_n\}\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=0, \tag{1.10}$$

再令 $\tilde{X}=\mathcal{F}/\sim$，定义其上的度量为[1]

$$\tilde{d}(\{x_n\},\{y_n\})=\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n). \tag{1.11}$$

为了说明 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 为度量空间，还需要证明良定性，即上面的极限存在，并且距离不依赖代表元的选取. 首先借助三角不等式以及 Cauchy 列性质易得

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\leqslant d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m)\to 0,\quad m,n\to\infty, \tag{1.12}$$

因此 $\{d(x_n,y_n)\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，其极限存在.

[1] 虽然 $\tilde{X}$ 中的元素都是等价类，但简便起见，用 $\mathcal{F}$ 中的元素来代表其所处等价类.

再设 $\{x_n\}\sim\{x_n'\},\{y_n\}\sim\{y_n'\}$，则类似有

$$|d(x_n,y_n)-d(x_n',y_n')|\leqslant d(x_n,x_n')+d(y_n,y_n')\to 0,\quad n\to\infty, \tag{1.13}$$

故 $d(\{x_n\},\{y_n\})=d(\{x_n'\},\{y_n'\})$.

Step 2. 构造稠密子空间 $(X_0,\tilde{d})\cong(X,d)$.

对任意 $x\in X$，记 $\gamma(x)=\gamma_x=(x,x,\cdots)$ 为常驻点列，则它给出了嵌入 $X\hookrightarrow\tilde{X}$（即将 x 映为 γ_x 的等价类，这一嵌入依旧用 γ 表示），则易知

$$d(x,y)=\tilde{d}(\gamma_x,\gamma_y), \tag{1.14}$$

即 γ 是等距的，设 $X_0=\gamma(X)$ 则有 $(X_0,\tilde{d})\cong(X,d)$. 下证 $\overline{X}_0=\tilde{X}$，对任意 $\{x_n\}\in\tilde{X}$，考虑 $\tilde{X}$ 中的序列 $\{\alpha^k\}=\{\gamma_{x_k}\}$，根据 $\{x_n\}$Cauchy 列的性质可得

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{d}(\{x_n\},\alpha_k)=\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}d(x_n,x_k)=0, \tag{1.15}$$

故 $\alpha_k\to\{x_n\}$，得证.

Step 3. 证明 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 完备.

任取 $\tilde{X}$ 中的 Cauchy 列 $\{\alpha^k\}$，根据上面稠密性的证明过程，对任意 k，存在 n_k 使得对应的 $\alpha^k_{n_k}\in\alpha^k$ 满足

$$\tilde{d}(\beta^k,\alpha^k):=\tilde{d}(\gamma_{\alpha^k_{n_k}},\alpha^k)<\frac{1}{k}, \tag{1.16}$$

其中 $\beta^k=\gamma_{\alpha^k_{n_k}}$，根据 $\{\alpha^k\}$ 的 Cauchy 列性质可得

$$\begin{aligned}
d(\alpha^k_{n_k},\alpha^j_{n_j})&=\tilde{d}(\beta^k,\beta^j) &(1.17)\\
&\leqslant\tilde{d}(\beta^k,\alpha^k)+\tilde{d}(\alpha^k,\alpha^j)+\tilde{d}(\alpha^j,\beta^j) &(1.18)\\
&\leqslant\tilde{d}(\alpha^k,\alpha^j)+\frac{1}{k}+\frac{1}{j} &(1.19)\\
&\to 0,\quad k,j\to\infty, &(1.20)
\end{aligned}$$

即 $\{\beta^k\}$ 是 Cauchy 列，也即 $\alpha^0=(\alpha^1_{n_1},\alpha^2_{n_2},\cdots)$ 是 Cauchy 列，说明 $\alpha_0\in\tilde{X}$，因此

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\alpha^0,\alpha^k)&\leqslant\tilde{d}(\alpha^0,\beta^k)+\tilde{d}(\beta_k,\alpha^k) &(1.21)\\
&\leqslant\lim_{m\to\infty}d(\alpha^m_{n_m},\alpha^k_{n_k})+\frac{1}{k} &(1.22)\\
&\to 0,\quad k\to\infty, &(1.23)
\end{aligned}$$

故 $\alpha^k\to\alpha^0\in\tilde{X}$，说明 $(\tilde{X},\tilde{d})$ 是完备度量空间.

Step 4. 证明唯一性.

设 (X',d') 也为 (X,d) 的完备化，(X_0',d') 是 (X,d) 的嵌入，则存在等距同构 $\varphi:X_0\to X_0'$，下面将其延拓为 $\tilde{X}$ 到 X' 的等距同构. 对任意 $\alpha\in\tilde{X}$，存在 X_0 中的点列 $\{\alpha^k\}$ 收敛到 α（收敛点列必为 Cauchy 列），此时

$$\tilde{d}(\alpha^j,\alpha^k)=d'(\varphi(\alpha^j),\varphi(\alpha^k))\to 0,\quad j,k\to\infty, \tag{1.24}$$

因此 $\{\varphi(\alpha^k)\}$ 是 X_0' 中的 Cauchy 列，设其在 X' 中的极限为 α'，则定义 φ 的延拓 Φ 使得 $\Phi(\alpha)=\alpha'$，容易验证 Φ 的良定性（只要注意到 φ 是保等价的）以及等距性（三角不等式放缩）.

根据上述定理，完备化也有等价定义

定义 1.12 (完备化)

称度量空间 (X,d) 的完备化为包含 (X,d) 的最小的完备度量空间 $(\tilde{X},d)$，也即任何能等距嵌入 (X,d) 的空间都能等距嵌入它. ♣

1.3 紧性

定义 1.13 (紧性)

设 (X,d) 为度量空间，称 $A \subset X$ 为紧集，若对 A 的任何开覆盖，都存在有限子覆盖.

定义 1.14 (列紧/自列紧)

称 $A \subset X$ 列紧，若 A 中任何点列都有 X 中的收敛子列；进一步称之自列紧，若其中任何点列都有 A 中的收敛子列. 若 X 本身是自列紧集，则称 (X,d) 为列紧空间.

命题 1.3

1. 列紧空间完备.
2. 列紧空间内任意子集都是列紧集，任意闭集都是自列紧集.

例 1.7 在 $(\mathbb{R}^n, d)$ 中，列紧等价于有界，自列紧等价于有界闭.

一般有界并不等价于列紧，例如

例 1.8 在 (ℓ^2, ρ_2) 中，设 $e_n = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots)$，则 $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ 有界，但对任意 $m \neq n$ 有 $\rho_2(e_n, e_m) = \sqrt{2}$，故它不列紧.

为了将有界性推广，下面定义完全有界性.

定义 1.15 (ε-网)

设 $A \subset X$，称 $N_\varepsilon \subset A$ 是 A 的一个 ε-网，若

$$A \subset \bigcup_{y \in N_\varepsilon} B(y, \varepsilon), \tag{1.25}$$

也即对任意 $a \in A$，存在 $x \in N_\varepsilon$ 使得 $d(a,x) < \varepsilon$.

定义 1.16 (完全有界)

称 $A \subset X$ 完全有界，若对任意 $\varepsilon > 0$，A 有有限 ε-网.

显然完全有界蕴含有界（考虑 1-网），反之不然，反例同上

例 1.9 $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 (ℓ^2, ρ_2) 中的有界集，但其中不存在有限 $1/2$-网.

命题 1.4

完备空间中，M 列紧当且仅当对任意 $\varepsilon > 0$，它存在列紧 ε-网.

证明 完备空间中列紧与完全有界等价，若 M 列紧，则对任意 $\varepsilon > 0$，其自身就是一个列紧 ε-网.

反之若对任意 $\varepsilon > 0$，M 存在列紧 ε-网 N_ε，则 $N_{\varepsilon/2}$ 列紧说明 $N_{\varepsilon/2}$ 完全有界，即存在有限 $\varepsilon/2$-网

$$N'_{\varepsilon/2} = \{y_1, \cdots, y_n\} \subset N_{\varepsilon/2}$$

使得对任意 $y \in N_{\varepsilon/2}$，存在某个 i 使得 $d(y, y_i) < \varepsilon/2$. 而 $N_{\varepsilon/2}$ 为 A 的 $\varepsilon/2$-网，因此对任意 $x \in A$，存在 $y \in N_{\varepsilon/2}$ 使得 $d(x,y) < \varepsilon/2$，因此对任意 x，存在某个 y_i 使得

$$d(x, y_i) \leqslant d(x,y) + d(y, y_i) < \varepsilon,$$

即 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 是 A 的一个 ε-网，根据 ε 任意性可知 A 全有界，即其列紧.

定理 1.3 (Hausdorff)

度量空间 (X,d) 中的列紧集必然完全有界；若 (X,d) 完备，则其中完全有界集必然列紧.

证明 首先设 A 为 X 中的列紧集，假设它不是完全有界的，则存在 ε_0，使得 A 不存在有限 ε_0 网，换句话说，A 不能被有限个 ε_0 球覆盖. 任取 $x_1 \in A$，由此构造点列：

1. 存在 $x_2 \in A\backslash B(x_1, \varepsilon_0)$，也即 $d(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon_0$.
2. 存在 $x_3 \in A\backslash(B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0))$，也即 $d(x_1, x_3), d(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon_0$.

以此类推可得 A 中点列 $\{x_n\}$，对任意 $m \neq n$ 都有 $d(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0$，故无收敛子列，与紧性矛盾.

再设 X 完备，$A \subset X$ 完全有界，任取 $\{x_n\} \subset A$，设 $N_{1/n}$ 为 A 的有限 $1/n$-网，下面构造其收敛子列：

1. 存在 $y_1 \in N_1$ 以及 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_n^{(1)}\}$，使得 $\{x_n^{(1)}\} \subset B(y_1, 1)$（或者说必然有某个 $B(y_1, 1)$ 包含 $\{x_n\}$ 中无穷多个点）.
2. 存在 $y_2 \in N_{1/2}$ 以及 $\{x_n^{(1)}\}$ 的子列 $\{x_n^{(2)}\}$，使得 $\{x_n^{(2)}\} \subset B(y_2, 1/2)$.

以此类推，取对角线子列 $\{x_n^{(n)}\}$，则 $x_n^{(n)} \in \bigcap_{k=1}^n B(y_n, 1/n)$，即有

$$d(x_{n+p}^{(n+p)}, x_n^{(n)}) \leqslant d(x_{n+p}^{(n+p)}, y_n) + d(y_n, x_n^{(n)}) \leqslant \frac{2}{n}, \tag{1.26}$$

故 $\{x_n^{(n)}\}$ 为 Cauchy 列，根据 X 的完备性可得它是 $\{x_n\}$ 的收敛子列.

定理 1.4

度量空间中，紧性与自列紧性等价.

注 由于度量空间是 C1 的，因此可通过证明紧 C1 空间是自列紧的来证明第一部分.

证明 首先证明紧 $\Rightarrow$ 自列紧，分两步进行.

Step 1. 证明紧 $\Rightarrow$ 闭.

设 $A \subset X$ 紧，下证 A^c 开，任取 $x \in A^c$，则

$$A \subset \bigcup_{y \in A} B(y, d(x, y)/3) \Rightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_m, d(x, y_m)/3), \tag{1.27}$$

令 $\delta = \min\{d(x, y_1), \cdots, d(x, y_m)\}/3$，则 $B(x, \delta)$ 与上面有限球的并无交，否则存在 $a \in A, y_k$ 使得

$$d(x, y_k) \leqslant d(x, a) + d(a, y_k) \leqslant \delta + \frac{1}{3}d(x, y_k) < d(x, y_k), \tag{1.28}$$

矛盾，这就说明 $B(x, \delta) \subset A^c$，即 A^c 开，A 闭.

Step 2. 证明紧 $\Rightarrow$ 列紧.

设 $A \subset X$ 紧，假设存在 $\{x_n\} \subset A$ 无收敛子列（不妨设该点列中任意项不同），设 $S_n = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}\backslash\{x_n\}$，则根据假设可知 S_n 闭，并且 $\{S_n^c : n \in \mathbb{N}\}$ 构成 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的开覆盖，存在有限子覆盖

$$\bigcup_{k=1}^m S_{n_k}^c \supset \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \Leftrightarrow \bigcap_{k=1}^m S_{n_k} \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}^c, \tag{1.29}$$

但任何 $S_n \subset \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$，矛盾.

再来证明自列紧 $\Rightarrow$ 紧.

设 $A \subset X$ 自列紧，则 A 完全有界，因此存在有限 $1/n$ 网 $N_{1/n}$ 使得

$$A \subset \bigcup_{y \in N_{1/n}} B(y, 1/n), \tag{1.30}$$

若 A 不紧，则存在开覆盖 $\{G_\alpha\}$，其无有限子覆盖，也即对任意 n，存在 $y_n \in N_{1/n}$ 使得 $B(y, 1/n)$ 不能被有限个 G_α 覆盖，根据 A 的自列紧性，$\{y_n\}$ 存在收敛子列 $y_{n_k} \to y_0 \in A$，因此必然有某个 $G_{\alpha_0} \ni y_0$，故存在 $\delta > 0$，$B(y_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$，而也存在充分大的 k 使得

$$d(y_{n_k}, y_0) < \delta/2, \quad 1/n_k < \delta/2, \tag{1.31}$$

这说明 $B(y_{n_k}, 1/n_k)$ 可被有限个 G_α 覆盖，矛盾.

引出紧性后，可以研究紧空间上的连续函数. 设 (M, ρ) 为紧度量空间，定义 $C(M)$ 为其上连续函数的全体，定义距离

$$d(f, g) = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|, \tag{1.32}$$

则断言：

命题 1.5

$(C(M),d)$ 为完备度量空间.

证明 由于连续函数将紧集映为紧集，因此对任意 $f\in C(M)$，$f(M)$ 为 R 中的有界闭集，故显然 $d<\infty$. 下证完备性，设 $\{f_n\}$ 为 $C(M)$ 中的 Cauchy 列，易知对任意 $x\in M$，$\{f_n(x)\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的 Cauchy 列，因此可设 f 为 $\{f_n\}$ 的逐点极限，由于对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，对任意 $m,n>N,x\in M$ 有

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon, \tag{1.33}$$

因此令 $m\to\infty$ 可得 $|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$，根据 $x\in M$ 的任意性可知

$$\sup_{x\in M}|f(x)-f_n(x)|=d(f,f_n)\leqslant\varepsilon, \tag{1.34}$$

故 $d(f,f_n)\to 0$. 再证 $f\in C(M)$，对任意 $\varepsilon>0$，首先存在充分大的 n 使得 $d(f,f_n)<\varepsilon/5$，取 δ 使得

$$\sup_{\rho(x,y)<\delta}|f_n(x)-f_n(y)|<\varepsilon/5, \tag{1.35}$$

并且 M 存在网 $N_{\delta/3}=\{x_1,\cdots,x_m\}$，说明对任意 $x,y\in M$，存在 $x_i,x_j\in N_{\delta/3}$ 使得 $\rho(x,x_i),\rho(y,x_j)<\delta/3$，因此当 $\rho(x,y)<\delta/3$ 时 $\rho(x_i,x_j)<\delta$，故

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)|&\leqslant|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_n(x_j)| &(1.36)\\&+|f_n(x_j)-f(x_j)|+|f(x_j)-f(y)| &(1.37)\\&\leqslant 2d(f,f_n)+3\sup_{\rho(s,t)<\delta}|f_n(s)-f_n(t)| &(1.38)\\&<\varepsilon &(1.39)\end{aligned}$$

即得 $f\in C(M)$，说明 $(C(M),d)$ 完备.

$\mathbb{R}^n$ 中的紧集是有界闭集，那么如何刻画 $(C(M),d)$ 中的紧集呢？这是 $\mathbb{R}$ 上 Arzela-Ascoli 定理的推广，首先定义等度连续.

定义 1.17 (等度连续)

设 $\mathcal{F}$ 为 $C(M)$ 中的函数族，称其等度连续，若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意 $f\in\mathcal{F},\rho(x,y)<\delta$ 都有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon. \tag{1.40}$$

注 由于这里的 δ 仅依赖 ε 的选取，因此这里的等度连续也称“一致等度连续”.

定理 1.5 (Arzela-Ascoli)

$\mathcal{F}\subset C(M)$ 列紧当且仅当其有界且等度连续.

注 有时条件会写作“一致有界”，它在 $\mathbb{R}$ 中来看是指函数“有一致的界”，但这实际上就是在度量空间 $(C(M),d)$ 中有界.

证明 $\Rightarrow$：列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow$ 有界，对任意 $\varepsilon>0$，完全有界性说明存在 $\varepsilon/3$-网 $N_{\varepsilon/3}=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$，并且存在 $\delta>0$ 使得对每个 φ_i 有

$$\sup_{\rho(x_1,x_2)<\delta}|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|<\varepsilon/3, \tag{1.41}$$

因此对任意 $\varphi\in\mathcal{F}$，存在某个 φ_i 使得 $d(\varphi,\varphi_i)<\varepsilon/3$，故只要 $\rho_{x_1,x_2}<\delta$ 就有

$$\begin{aligned}|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|&\leqslant|\varphi(x_1)-\varphi_i(x_1)|+|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)|+|\varphi_i(x_2)-\varphi(x_2)| &(1.42)\\&\leqslant 2d(\varphi,\varphi_i)+|\varphi_i(x_1)-\varphi_i(x_2)| &(1.43)\\&<\varepsilon, &(1.44)\end{aligned}$$

即 $\mathcal{F}$ 等度连续.

$\Leftarrow$: 根据 $(C(M), d)$ 的完备性，只需证明其完全有界.$\mathcal{F}$ 等度连续说明对任意 $\varepsilon > 0$，存在 δ 使得对任意 $\varphi \in \mathcal{F}$ 有

$$\sup_{\rho(x_1,x_2)<\delta} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon, \tag{1.45}$$

M 列紧说明存在 δ-网 $N_\delta = \{x_1, \cdots, x_n\}$，定义映射

$$T : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{1.46}$$

$$\varphi \longmapsto (\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)) \tag{1.47}$$

则 $\mathcal{F}$ 有界说明 $\sup\limits_{x\in M, \varphi\in\mathcal{F}} |\varphi(x)| = R < \infty$，故对任意 $\varphi \in \mathcal{F}$

$$||T\varphi|| = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)| \leqslant nR, \tag{1.48}$$

即 $\tilde{\mathcal{F}} = T(\mathcal{F})$ 有界，这在 $\mathbb{R}^n$ 中可得其全有界，因此存在 $\varepsilon/3$-网 $\widetilde{N}_{\varepsilon/3} = \{T\varphi_1, \cdots, T\varphi_m\}$，断言 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的 ε 网，这是因为对任意 $\varphi \in \mathcal{F}$，存在某个 φ_i 使得 $\rho_n(T\varphi, T\varphi_i) < \varepsilon/3$，对任意 $x \in M$，存在 $x_r \in N_\delta$ 使得 $\rho(x, x_r) < \delta$，因此

$$|\varphi(x) - \varphi_i(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_r)| + |\varphi(x_r) - \varphi_i(x_r)| + |\varphi_i(x_r) - \varphi_i(x)| \tag{1.49}$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\varepsilon + \rho_n(T\varphi, T\varphi_i) \tag{1.50}$$

$$< \varepsilon. \tag{1.51}$$

对 x 取上确界即得（上面的 ρ_n 指 $\mathbb{R}^n$ 中的度量）.

对于 L^p 空间中的列紧集也有具体刻画：

定理 1.6 (Riesz-Frechet-Kolmogorov)

设 $1 \leqslant p < \infty$，则 $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ 列紧当且仅当其满足:

1. $\mathcal{F}$ 有界.
2. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $M > 0$ 使得 $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int_{|x|>M} |f|^p dx < \varepsilon^p$.
3. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $h \in \mathbb{R}^n, |h| < \varepsilon$ 都有 $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} ||\tau_h f - f||_p < \varepsilon$.

♡

1.4 赋范向量空间

向量空间的基本概念略.

1.4.1 赋范空间

定义 1.18 (Hamel 基)

设 X 为向量空间，$E \subset X$ 线性无关且 $\operatorname{Span}(E) = X$，则称 E 为 X 的一个 Hamel 基（或代数基），若 $|E| < \infty$，则记 $\dim X = |E|$，否则记 $\dim X = \infty$.

♣

注 Hamel 基考虑了无穷集合的任意有限和，因此 $e_n = (\delta_{in})$ 不是 ℓ^2 的一个 Hamel 基.

定理 1.7

任何向量空间都有 Hamel 基.

♡

证明 有限维是容易的，下设 X 不能被有限生成. 设 S 为 X 中一个线性无关子集，设 $\mathscr{S}$ 为 X 中包含 S 的线性无关集的全体，则它是集合包含关系下的偏序集，设 $\{S_i : i \in I\}$ 是其一个全序子集，则 $\bigcup_{i\in I} S_i$ 是一个包含 S 的线性无关子集，即为该全序子集上界，根据 Zorn 引理可知 $\mathscr{S}$ 存在极大元 H，下证 $\mathrm{Span}(H) = X$，若不然则存在 $x \in X, x \notin \mathrm{Span}(H)$，因此 $H \subsetneq H \cup \{x\}$，与极大性矛盾，得证.

定义 1.19 (赋范空间)

设 X 为向量空间，若存在函数 $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ 满足

- 正定性：$||x|| \geqslant 0$，当且仅当 $x = 0$ 时取等.
- 齐次性：$||\lambda x|| = |\lambda|\,||x||$.
- 三角不等式：$||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

则称 $||\cdot||$ 为 X 中的一个范数，$(X, ||\cdot||)$ 称为赋范空间.

♣

注 根据范数可以诱导度量 $d(x,y) := ||x-y||$，称为 X 上的典则度量. 若 X 在典则度量下完备，则称 $(X, ||\cdot||)$ 为 **Banach 空间**.

例 1.10

1. L^p 空间是 Banach 空间，ℓ^p 空间亦然（$1 \leqslant p < \infty$）.
2. $L^\infty, \ell^\infty = \{\text{有界数列}\}$ 是 Banach 空间；$c := \{\text{收敛数列}\} \subset \ell^\infty$ 亦然.
3. 紧度量空间 M 上的连续函数空间 $C(M)$ 是 Banach 空间.
4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 有界，$C^k(\overline{\Omega}) := \{\overline{\Omega}\text{上}k\text{次连续可微函数}\}$，则定义
$$||f||_* := \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_{x\in\overline{\Omega}} |\partial^\alpha f(x)|, \tag{1.52}$$
其中
$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}, \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n. \tag{1.53}$$
还可以定义范数
$$||f||_{k.p.} = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega |\partial^\alpha f|^p\right)^{1/p}, \tag{1.54}$$
若考虑
$$S := \{f \in C^k(\Omega) : ||f||_{k.p.} < \infty\}, \tag{1.55}$$
则其在 $||\cdot||_{k.p.}$ 下的完备化称为 **Sobolev 空间**，记为 $H^{k.p.}(\Omega)$.

定义 1.20 (范数的比较)

设 $||\cdot||_1, ||\cdot||_2$ 为 X 上的两个范数，若对任意 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$，$||x_n||_2 \to 0 \Rightarrow ||x_n||_1 \to 0$，则称 $||\cdot||_2$ 强于 $||\cdot||_1$（或 $||\cdot||_1$ 弱于 $||\cdot||_1$），可记为 $||\cdot||_1 \lesssim ||\cdot||_2$. 若 $||\cdot||_1 \lesssim ||\cdot||_2, ||\cdot||_2 \lesssim ||\cdot||_1$，则称二者等价，记为 $||\cdot||_1 \approx ||\cdot||_2$.

♣

定理 1.8

1. $||\cdot||_1 \lesssim ||\cdot||_2 \Leftrightarrow \exists C > 0, s.t. ||\cdot||_1 \leqslant C||\cdot||_2$.
2. $||\cdot||_1 \approx ||\cdot||_2 \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0, s.t. C_1||\cdot||_2 \leqslant ||\cdot||_1 \leqslant C_2||\cdot||_2$.

♡

证明 $\Rightarrow$：若不然，假设对任意 n，存在 $x_n \in X$ 使得 $||x_n||_1 > n||x_n||_2$，令 $y_n = x_n/||x_n||_1$ 可得矛盾
$$||y_n||_2 < \frac{1}{n} \Rightarrow ||y_n||_2 \to 0 \Rightarrow ||y_n||_1 = 1 \to 0. \tag{1.56}$$

另一边显然，第二条亦然.

例 1.11 $\mathbb{R}^n$ 可嵌入 ℓ^p 中，即定义 p-范数

$$||x||_p := \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{1/p} \qquad ||x||_\infty := \max_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|. \tag{1.57}$$

易见

$$||x||_\infty \leqslant ||x||_p \leqslant n^{1/p}||x||_\infty, \tag{1.58}$$

因此任何 p-范数都是等价的（特别它们都与 ∞-范数等价）. 这并不是巧合，考虑下述定理.

定理 1.9

有限维向量空间上所有范数都等价.

证明 设 $\dim X = n$，有基 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为其一组基，则任意 $x\in X$ 可唯一表示为 $x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k$，定义映射

$$T : X \longrightarrow \mathbb{F}^n \tag{1.59}$$

$$x \longmapsto (\xi_1,\cdots,\xi_n) \tag{1.60}$$

则 T 为线性同构，令

$$|\xi| := \left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{1/2}, \quad ||x||_T := |Tx|, \tag{1.61}$$

则 $||\cdot||_T$ 为 X 上范数，下证对 X 上任意范数 $||\cdot||$ 有 $||\cdot||\approx||\cdot||_T$. 令

$$p : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1.62}$$

$$\xi \longmapsto ||T^{-1}(\xi)|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k\right|\right| \tag{1.63}$$

则 $p(\xi)=|\xi|p(\xi/|\xi|)$ 且 p 为连续，这是因为

$$|p(\xi)-p(\eta)| \leqslant \left|\left|\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\eta_k)e_k\right|\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|\,||e_k|| \tag{1.64}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}||e_k||^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k-\eta_k|^2\right)^{1/2} \tag{1.65}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n}||e_k||^2\right)^{1/2}|\xi-\eta|, \tag{1.66}$$

令 $S_1=\{\xi\in\mathbb{F}^n : |\xi|=1\}$，则 S_1 紧，设 C_1,C_2 为 p 在其上的最小、最大值，则

$$C_1 \leqslant p\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \leqslant C_2 \Rightarrow C_1|\xi| \leqslant p(\xi) \leqslant C_2|\xi|, \tag{1.67}$$

因此

$$C_1||x||_T = C_1|Tx| \leqslant p(Tx) = ||x|| \leqslant C_2|Tx| = C_2||x||_T, \tag{1.68}$$

再说明 $C_1\neq 0$，$C_1=0$ 当且仅当存在 $\xi\in S_1, p(\xi)=0$，这时有矛盾

$$p(\xi)=0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\xi_k e_k = 0 \Leftrightarrow \xi=0\notin S_1. \tag{1.69}$$

在线性空间的基础上，可以定义赋范空间的同构.

定义 1.21 (赋范空间同构)

称 $(X,||\cdot||_X),(Y,||\cdot||_Y)$ 同构，若存在线性空间同构 $T : X\to Y$ 且 T,T^{-1} 均连续.

注 从拓扑的角度来看，赋范空间的同构实际上是范数诱导度量诱导的拓扑空间的同胚.

定理 1.10

有限维同维赋范空间彼此同构.

证明 考虑上一条定理中的线性同构.

推论 1.2

有限维赋范空间必然是 Banach 空间.

推论 1.3

任何赋范空间的有限维子空间都是闭子空间.

证明 有限维赋范空间完备，因此其中任意收敛点列都收敛到自身，故它是闭子空间.

下面的结论刻画了有限维赋范空间，首先考虑引理.

引理 1.1 (Riesz)

设 $(X, ||\cdot||)$，Y 为其真闭（赋范线性）子空间，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $e \in S_1$ 使得 $d(e, Y) \geqslant 1 - \varepsilon$.

证明 $Y \subsetneq X$ 说明存在 $x \in X \backslash Y$，因此 $d = d(x, Y) > 0$（结合 Y 闭）. 对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $y_0 \in Y$ 使得

$$d \leqslant ||x - y_0|| \leqslant \frac{d}{1-\varepsilon}, \tag{1.70}$$

令 $e = (x - y_0)/||x - y_0||$，则对任意 $z \in Y$ 有

$$||e - z|| = \frac{1}{||x - y_0||}||x - (y_0 + ||x - y_0||z)|| \geqslant \frac{1-\varepsilon}{d} \cdot d = 1 - \varepsilon, \tag{1.71}$$

取下确界得证.

注意到子空间中的单位球实际上是其与大空间单位球之交，因此根据 Riesz 引理，对一列闭子空间 $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots$，可规定 $\varepsilon > 0$，取得 $x_n \in X_n \cap S_1$ 满足 $d(x_n, X_{n-1}) \geqslant 1 - \varepsilon$，由此对任意 m, n 有 $||x_n - x_m|| \geqslant 1 - \varepsilon$，即得大空间中单位球面上的一个无收敛子列的点列. 由此可证

定理 1.11

设 $(X, ||\cdot||)$，则 X 中单位球面列紧当且仅当 $\dim X < \infty$.

证明 $\Leftarrow$：考虑同构 $T : X \to \mathbb{F}^n$（同前述定理中的构造），则存在 $C_1, C_2 > 0$ 使得

$$C_1|Tx| \leqslant ||x|| \leqslant C_2|Tx|, \tag{1.72}$$

因此 $T(S_1) \subset \mathbb{F}^n$ 列紧、有界，因此对任意 $\{x_k\} \subset S_1$，$\{Tx_k\}$ 有收敛子列，设 $Tx_{k_j} \to y \in \mathbb{F}^n$，则

$$||x_{k_j} - T^{-1}y|| \leqslant C_2|Tx_{k_j} - y| \to 0. \tag{1.73}$$

$\Rightarrow$：假设 $\dim X = \infty$，则存在一列 $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ 线性无关，令 $X_n = \mathrm{Span}(e_1, \cdots, e_n)$，则存在一列（闭）子空间 $X_1 \subset X_2 \subset \cdots$，根据 Riesz 引理，取 $\varepsilon = 1/2$，则对任意 n，存在 $x_n \in X_n \cap S_1$ 使得 $d(x_n, X_{n-1}) \geqslant 1/2$，即 $\{x_n\} \subset S_1$ 但对任意 $n \neq m$ 有 $||x_n - x_m|| \geqslant 1/2$，故 S_1 不列紧.

1.4.2 商空间

定义 1.22 (商空间)

设 $(X, ||\cdot||)$，X_0 为其闭子空间，则线性商空间 X/X_0 在商范数

$$||[x]||_* = \inf_{y \in [x]} ||y|| \tag{1.74}$$

下是赋范空间，称为 X 的商空间.

注 这里 X_0 的闭性是必要的，否则上述定义的 $||\cdot||_*$ 未必是一个范数（$||[x]||_*=0$ 不保证 $[x]=0$）.

命题 1.6

沿用上述记号，$(X/X_0,||\cdot||_*)$ 是赋范空间，并且当 $(X,||\cdot||)$ 完备时，它也是完备的.

证明 首先证明这确实是一个范数，齐次是显然的，若 $||[x]||_*=0$，则存在 $x_n\in[x]$ 使得 $||x_n||\to 0\Rightarrow x_n\to 0$，$X_0$ 的闭性说明 $0\in[x]$，因此 $[x]=[0]$，得证. 再证三角不等式，首先

$$||[x]+[y]||_*=||[x+y]||_*=\inf_{z\in[x+y]}||z||, \tag{1.75}$$

取 $\{x_n\}\subset[x],\{y_n\}\subset[y]$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}||x_n||=||[x]||_*,\quad \lim_{n\to\infty}||y_n||=||[y]||_*, \tag{1.76}$$

则 $\{x_n+y_n\}\subset[x+y]$ 并且

$$||[x]+[y]||_*=||[x+y]||_*\leqslant||x_n+y_n||\to||[x]||_*+||[y]||_*, \tag{1.77}$$

得证. 若 $(X,||\cdot||)$ 完备，只需证明商空间中所有绝对收敛级数都收敛，设 $\sum_{n=1}^{\infty}||[x_n]||_*<\infty$，根据商范数定义可知存在 $y_n\in X_0$ 使得 $||x_n+y_n||\leqslant||[x_n]||_*+1/2^n$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}||x_n+y_n||\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}||[x_n]||_*+1<\infty, \tag{1.78}$$

X 的完备性说明 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$ 收敛到某个 $x\in X$，因此

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{n}[x_n]-[x]\right|\right|_*\leqslant\left|\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)-x\right|\right|\to 0, \tag{1.79}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}[x_n]=[x]$，得证.

上面的证明用到了一个习题中的结论：

命题 1.7

$(X,||\cdot||)$ 完备当且仅当对任意 $\{x_n\}\subset X$，$\sum_{n=1}^{\infty}||x_n||<\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，或者说绝对收敛蕴含收敛.

证明 $\Rightarrow$：设 $\{x_n\}\subset X$ 满足 $\sum_{n=1}^{\infty}||x_n||<\infty$，令 $y_n=\sum_{k=1}^{n}x_k$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 N 使得对任意 $n>N$ 有 $\sum_{n>N}||x_n||<\varepsilon$，因此对任意 $n>N,p\in\mathbb{N}$ 有

$$||y_n-y_{n+p}||=\left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\right|\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}||x_k||<\varepsilon, \tag{1.80}$$

即 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列，由完备性可知它收敛.

$\Leftarrow$：任取 X 中 Cauchy 列 $\{x_n\}$，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)$ 使得对任意 $n>N(\varepsilon),p\in\mathbb{N}$ 有

$$||x_n-x_{n+p}||<\varepsilon, \tag{1.81}$$

设 $n_1=N(1/2)$，则对任意 $n>n_1$ 有 $||x_n-x_{n_1}||<1/2$；再令 $n_2=\max\{n_1,N(1/2^2)\}+1$，则 $n_1<n_2$ 且对任意 $n>n_2$ 有 $||x_n-x_{n_2}||<1/2^2$，以此类推可得子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足

$$||x_{n_k}-x_{n_{k+1}}||<\frac{1}{2^k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{\infty}||x_{n_k}-x_{n_{k+1}}||\leqslant 1<\infty, \tag{1.82}$$

根据条件可知 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 收敛，而其部分和为 $x_{n_m}=\sum_{k=1}^{m-1}(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$，因此 Cauchy 列 $\{x_n\}$ 存在收敛点列 $\{x_{n_k}\}$，进而其收敛，故 X 完备.

1.4.3 内积空间

定义 1.23 (内积空间)

设 $X/\mathbb{F}$ 为向量空间，若二元函数 $\langle\cdot,\cdot\rangle : X\times X\to\mathbb{F}$ 满足

- 第一个位置的线性：$\langle ax_1+bx_2,y\rangle = a\langle x_1,y\rangle + b\langle x_2,y\rangle$.
- 共轭对称性：$\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.
- 正定性：$\langle x,x\rangle \geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等.

注 显然内积可以诱导范数 $||x|| = \langle x,x\rangle$，反过来范数能诱导内积当且仅当其满足平行四边形定则 $||x+y||^2+||x-y||^2 = 2(||x||^2+||y||^2)$.

例 1.12

- ℓ^2 上有内积 $\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n\bar{y}_n$.
- L^2 上有内积 $\langle f,g\rangle = \int f\bar{g}$.

引理 1.2 (Cauchy-Schwarz)

设 X 为内积空间，则对任意 $x,y\in X$ 成立

$$|\langle x,y\rangle| \leqslant ||x||\,||y||, \tag{1.83}$$

等号成立当且仅当存在 $\lambda\in F$ 使得 $x=\lambda y$.

证明 不妨设 $y\neq 0$，对任意 $\lambda\in F$ 有

$$0\leqslant \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\,(\bar{\lambda}\langle x,y\rangle) + |\lambda|^2||y||^2. \tag{1.84}$$

取 $\lambda = -\langle x,y\rangle/||y||^2$ 则有

$$0\leqslant ||x||^2 - 2\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{||y||^2} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{||y||^4}||y||^2 = ||x||^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{||y||^2}, \tag{1.85}$$

移项即得.

定义 1.24 (Hilbert 空间)

若内积空间 X 的诱导范数完备，则称之为 Hilbert 空间.

命题 1.8 (极化恒等式)

设 X 为内积空间，则

1. 若 $F=\mathbb{R}$ 则 $\langle x,y\rangle = (||x+y||^2 - ||x-y||^2)/4$.
2. 若 $F=\mathbb{C}$ 则 $\langle x,y\rangle = \sum_{k=0}^3 i^k||x+i^ky||^2/4$.

命题 1.9 (平行四边形法则)

设 X 为内积空间，则对任意 $x,y\in X$ 有

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2+||y||^2). \tag{1.86}$$

定理 1.12 (Frechet-Von Neumann)

范数 $||\cdot||$ 由 X 上的内积诱导当且仅当 $||\cdot||$ 满足平行四边形法则.

证明

定义 1.25 (正交性)

设 X 为内积空间

1. 称 $x, y \in X$ 正交，若 $\langle x, y\rangle = 0$.
2. 称 $x \in X, M \subset X$ 正交，若 $\langle x, y\rangle = 0, \forall y \in M$. 对于集合 M，称所有与其正交的向量全体为 M 的正交补，记为 $M^{\perp}$.
3. 若 $S \subset X$ 中的任何两个不同向量正交，则称之为 X 中的正交集. 特别若 S 中每个向量都是单位向量，则称之位规范正交集.

♣

注 容易验证若 $x \perp M$ 则 $x \perp \mathrm{Span}(M)$；对任意 $M \subset X$，$M^{\perp}$ 是一个闭子空间.

命题 1.10

若 $\overline{M} = X$，则 $M^{\perp} = \{0\}$.

♠

证明 对任意 $y \in X, x \in M^{\perp}$，取 $\{y_n\} \subset M$ 使得 $y_n \to y$ 则

$$0 = \langle x, y_n\rangle \Rightarrow \langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, y_n\rangle = 0, \tag{1.87}$$

故 $x = 0$.

定义 1.26 (完备正交集)

若正交集 S 满足 $S^{\perp} = \{0\}$，则称其完备.

♣

定理 1.13

任何非平凡内积空间必有完备正交集.

♡

证明 设 S 为 X 的一个正交集，设 $\mathscr{S}$ 为 X 中包含 S 的正交集的全体，它是集合包含关系下的偏序集. 设 $\{S_i : i \in I\}$ 为其全序子集，则 $\bigcup_{i\in I} S_i$ 是一个包含 S 的正交集，即为该全序子集的上界，由 Zorn 引理可知 $\mathscr{S}$ 存在极大元 H，若存在 $x \notin H$ 使得 $x \perp H$，则 $H \subsetneq H \cup \{x\}$，与极大性矛盾，因此 H 即为完备正交集.

定义 1.27 (规范正交基)

设 $S = \{e_\alpha\}$ 为 X 的规范正交集，若对任意 $x \in X$，都有唯一表示

$$x = \sum_{\alpha} \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha, \tag{1.88}$$

则称 S 是 X 的一个规范正交基，此时称 $\{\langle x, e_\alpha\rangle\}$ 为 x 的 Fourier 系数.

♣

定理 1.14 (Bessel 不等式)

设 $\{e_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 为 X 的规范正交基，则对任意 $x \in X$ 有

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x, e_\alpha\rangle|^2 \leqslant ||x||^2. \tag{1.89}$$

♡

证明 设 $A = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_N\}$ 为 Λ 的有限子集，则

$$0 \leqslant \left|\left| x - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle e_{\alpha_i} \right|\right| \tag{1.90}$$

$$= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle \langle e_{\alpha_i}, x\rangle - \sum_{i=1}^{N} \overline{\langle x, e_{\alpha_j}\rangle} \langle x, e_{\alpha_j}\rangle + \sum_{i,j=1}^{N} \langle x, e_{\alpha_i}\rangle \overline{\langle x, e_{\alpha_j}\rangle} \delta_{ij} \tag{1.91}$$

$$= ||x||^2 - \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_{\alpha_j}\rangle|^2, \tag{1.92}$$

故 Bessel 不等式对 Λ 的任意有限子集成立，由此可以看出对任意 $n\in\mathbb{N}$，集合 $\Lambda_n:=\{\alpha\in\Lambda:|\langle x,e_\alpha\rangle|>1/n\}$ 是至多可数的（因为 $||x||$ 有限），因此对有限情形取极限即得.

由于绝对收敛级数可换序，因此上面对至多可数个 e_n 的排列顺序不会影响结果，为了说明规范正交基的表示是良定的，需要解决另一个问题，即正交基表示 $x=\sum_\alpha\langle x,e_\alpha\rangle e_\alpha$ 是否依赖 e_α 的顺序？

1.4.4 最佳逼近元

数学中常用一组元素的线性组合逼近一个元素，在赋范空间中这种问题反映为对任意 x 以及 $e_1,\cdots,e_n\in X$，是否存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in F$ 使得

$$\left|\left|x-\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i\right|\right|=\inf_{\alpha\in F^n}\left|\left|x-\sum_{i=1}^n\alpha_ie_i\right|\right|, \tag{1.93}$$

换句话说，令 $M=\mathrm{Span}(e_1,\cdots,e_n)$，是否存在 $y_0\in M$ 使得

$$||x-y_0||=\inf_{y\in M}||x-y||=d(x,M). \tag{1.94}$$

这里的 $\sum_{i=1}^n\lambda_ie_i$ 或者 y_0 就称为 x 的**最佳逼近元**.

定理 1.15

对于有限个向量 $e_1,\cdots,e_n$，最佳逼近元存在.

证明 不妨设 $e_1,\cdots,e_n$ 线性无关，考虑函数

$$F:\mathbb{F}^n\longrightarrow\mathbb{R} \tag{1.95}$$

$$\alpha\longmapsto\left|\left|x-\sum_{i=1}^n\alpha_ke_k\right|\right|, \tag{1.96}$$

则易知 F 连续，并且

$$F(\alpha)\geqslant\left|\left|\sum_{k=1}^n\alpha_ke_k\right|\right|-||x||, \tag{1.97}$$

定义 $|||\alpha|||:=||\sum_{i=1}^n\alpha_ke_k||$，则它是 $\mathbb{F}^n$ 上的范数，并且存在 $C>0$ 使得 $|||\alpha|||\geqslant C|\alpha|$（有限维赋范空间的范数等价），则 $F(\alpha)\geqslant C|\alpha|-||x||\to\infty,|\alpha|\to\infty$，因此 F 在 $\mathbb{F}^n$ 上有最小值.

定义 1.28 (凸集)

设 X 为向量空间，$C\subset X$，若对任意 $x,y\in C,\lambda\in[0,1]$，$\lambda x+(1-\lambda)y\in C$，则称 $C\subset X$ 为凸集.

定理 1.16 (变分引理)

设 X 为 Hilbert 空间，$M\subset X$ 为非空闭凸集，则对任意 $x\in X$，存在唯一 $y_0\in M$ 使得 $||x-y_0||=d(x,M)$.

证明 令 $d=d(x,M)=\inf_{z\in M}||x-z||$，则存在 $\{y_n\}\subset M$ 使得 $||x-y_n||\to d$，由平行四边形法则可得

$$||(y_m-x)-(y_n-x)||^2+||(y_m-x)+(y_n-x)||^2=2(||y_m-x||^2+||y_n-x||^2), \tag{1.98}$$

$$\begin{aligned}||y_m-y_n||^2&=2(||y_m-x||^2+||y_n-x||^2)-4||x-(y_m+y_n)/2||^2 &(1.99)\\&\leqslant 2(||y_m-x||^2+||y_n-x||^2)-4d^2 &(1.100)\\&\to 0,\quad m,n\to\infty &(1.101)\end{aligned}$$

因此 $\{y_n\}$ 为 Cauchy 列，根据完备性可知其收敛到某个 $y_0\in M$，即为所求. 唯一性借助平行四边形法则同样易证.

定理 1.17 (正交分解)

设 X 为 Hilbert 空间，M 为其闭子空间，则 $H=M\oplus M^\perp$.

证明 对任意 $x \in X$，存在唯一 $y \in M$ 使得 $||x-y|| = d(x, M) := d$，下证 $x - y \in M^\perp$，对任意 $w \in M, \lambda \in \mathbb{F}$ 有

$$d^2 \leqslant ||x-(y+\lambda w)||^2 = ||x-y||^2 - 2\mathrm{Re}\,(\bar{\lambda}\langle x-y, w\rangle) + |\lambda|^2||w||^2, \tag{1.102}$$

取 $\lambda = \langle x-y, w\rangle/||w||^2$ 可得

$$d^2 \leqslant ||x-y||^2 - \frac{|\langle x-y, w\rangle|^2}{||w||^2} \leqslant d^2, \tag{1.103}$$

因此必有 $\langle x-y, w\rangle = 0$.

定义 1.29 (正交投影)

设 X 为 Hilbert 空间，M 为其闭子空间，则投影映射 $P_M : X \to M, x \mapsto y$ 称为 H 到 M 的正交投影. ♣

命题 1.11

1. $\mathrm{Im}\, P_M \in M, \mathrm{Im}\,(I-P_M) = \mathrm{Ker}\, P_M = M^\perp$，$P_M^2 = P_M$.
2. $I = P_M + P_{M^\perp}$.
3. $||x - P_M(x)|| = d(x, M)$.
4. $||P_M(x)|| \leqslant ||x||$. ♠

回到对规范正交基表示的良定性的讨论，

引理 1.3

设 X 为 Hilbert 空间，$\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为其中一个规范正交集，设 $M = \overline{\mathrm{Span}(e_n : n \in \mathbb{N})}$，则对任意 $x \in X$，$\sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k = P_M(x)$. ♡

证明 根据 Bessel 不等式有 $\sum_{k=1}^\infty |\langle x, e_k\rangle|^2 \leqslant ||x||^2$，因此 $\{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k\rangle e_k\}$ 是 X 中的基本列，X 的完备性说明 $\sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k \in X$，而

$$\langle x - \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k, e_m\rangle = \langle x, e_m\rangle - \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_m\rangle = 0, \tag{1.104}$$

故 $x - \sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k \in M^\perp$，根据定义有 $\sum_{k=1}^\infty \langle x, e_k\rangle e_k = P_M(x)$.

根据上述引理，即使对 $\{e_n\}$ 进行重排，M 不变，最后得到的结果依旧为 $P_M(x)$，因此正交基的表示与排列无关.

定理 1.18

设 X 为 Hilbert 空间，$\{e_\alpha\}$ 为规范正交集，则对任意 $x \in X$，$\sum_\alpha \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha \in X$，并且

$$||x - \sum_\alpha \langle x, e_\alpha\rangle e_\alpha||^2 = ||x||^2 - \sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2. \tag{1.105}$$

♡

定理 1.19

设 X 为 Hilbert 空间，$S = \{e_\alpha\}$ 为规范正交集，则下述等价：

1. S 完备（即 $S^\perp = \{0\}$）.
2. S 是规范正交基.
3. S 满足 Parseval 等式，即 $||x||^2 = \sum_\alpha |\langle x, e_\alpha\rangle|^2, \forall x \in X$. ♡

证明 $1 \Rightarrow 2$：设 S 完备，若 S 不是规范正交基，则存在 $x_0 \in H$ 使得 $x_0 - \sum_\alpha \langle x_0, e_\alpha\rangle e_\alpha = y \neq 0$，容易验证 $y \in S^\perp$，与完备性矛盾.

$2 \Rightarrow 3$：根据上一条定理显然.

$3 \Rightarrow 1$：根据 Parseval 等式可直接得到 $S^\perp = \{0\}$.

因此在 Hilbert 空间中，完备正交集与规范正交基是等价的，而已经证明过任意内积空间都有完备正交集，因

此

推论 1.4

任一 Hilbert 空间都有规范正交基.

例 1.13 ℓ^2 中，$\{e_n\}$ 是一个规范正交基（但它不是 Hamel 基，并且其 Hamel 基必定是不可数的）.

1.4.5 Hilbert 空间的同构

定理 1.20 (Gram-Schmidt 正交化)

设 X 为内积空间，$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为一列线性无关向量，则存在规范正交集 $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得 $\operatorname{Span}(x_n : n \in \mathbb{N}) = \operatorname{Span}(e_n : n \in \mathbb{N})$.

定义 1.30 (内积空间的同构)

设 $(X_1, \langle\rangle_1), (X_2, \langle\rangle_2)$ 为内积空间，若存在线性同构 $T : X_1 \to X_2$ 使得 $\langle x, y\rangle_1 = \langle Tx, Ty\rangle_2$，则称二者是同构的内积空间.

定理 1.21

Hilbert 空间 X 可分当且仅当其有至多可数的规范正交基 S. 进一步, 若 $|S| < \infty$, 则 $X \cong F^{|S|}$, 若 $|S| = \infty$, 则 $X \cong \ell^2$.

证明 $\Rightarrow$：设 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为其可数稠密子集，则其中必然存在至多可数的规范正交基 $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$（先取线性无关子集，再做正交化），并且

$$\overline{\operatorname{Span}(e_n : n \in \mathbb{N})} = \overline{\operatorname{Span}(x_n : n \in \mathbb{N})} = X, \tag{1.106}$$

因此 $\{e_n\}$ 是 X 的规范正交基.

$\Leftarrow$：若 $\{e_n\}$ 为 X 至多可数的规范正交基，则集合

$$\left\{\sum_n a_n e_n : \operatorname{Re}(a_n), \operatorname{Im}(a_n) \in \mathbb{Q}\right\} \tag{1.107}$$

是其可数稠密子集，故 X 可分.

进一步的同构是显然的.

由此可知，可分 Hilbert 空间可以很自然进行分类.

1.4.6 Fourier 级数的收敛

对于圆周 S^1 上的函数 $F \in L^2(S^1)$，可令 $f(t) = F(e^{2\pi i t})$，即将 F 对应到 $\mathbb{R}$ 上以 1 为周期的周期函数 f，令 $e_k(t) = e^{2\pi i t}$，则 $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ 是一个规范正交集，下证这是一组规范正交基. 定义

$$\hat{f}(k) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)e^{-2\pi i k t}dt, \tag{1.108}$$

并且定义 f 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{2\pi i k x} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, e_k\rangle e_k. \tag{1.109}$$

定理 1.22

对任意 $f \in L^2(S^1)$，记 $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{2\pi inx}$，则

$$\lim_{N\to\infty} ||f - S_N(f)||_2 = 0. \tag{1.110}$$

♡

证明 根据前面的结论，这等价于 $\{e_n\}$ 是 $L^2(S^1)$ 的一组规范正交基，也等价于

$$(\{e_n : n \in \mathbb{Z}\})^{\perp} = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\mathrm{Span}(\{e_n : n \in \mathbb{Z}\})} = L^2(S^1), \tag{1.111}$$

设 Fourier 级数的 Cesaro 求和为

$$\sigma_N(f) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} S_k(f), \tag{1.112}$$

因此只需证明 $||f-\sigma_N(f)||_2 \to 0$,注意到 $S_N(f)(x) = f*D_N(x)$,其中 D_N 为 Dirichlet 核,则 $\sigma_N(f)(x) = f*F_N(x)$,其中 F_N 为 Fejer 核，并且是一个好核，因此 $||f - f * F_N||_2 \to 0$.

这就证明了，对任意 $f \in L^2(S^1)$，$S_N(f) \overset{a.e.}{\to} f$.

第 2 章 线性算子与线性泛函

2.1 线性算子

定义 2.1 (线性算子)

设 X, Y 为 K-向量空间，若映射 $T: X \to Y$ 满足 $T(ax+by) = aTx + bTy$，则称 T 为线性算子（或线性映射）. 特别当 $Y = K$ 时，称 T 是一个线性泛函. ♣

例 2.1

- 微分算子：设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开集，$X = Y = C^\infty(\Omega)$，则 $T = \sum_{|\alpha| \leqslant k} a_\alpha \partial^\alpha$ 是一个线性算子.
- 积分算子：设 K 为 $\Omega \times \Omega$ 上轭调可测函数，$X = L^2(\Omega), Y$ 为 Ω 上可测函数的全体，则由

$$T(u)(s) = \int_\Omega K(s,t)u(s)dt \tag{2.1}$$

  定义的算子是线性算子.
- Fourier 变换算子 $\mathscr{F}$ 是线性算子.

定义 2.2 (有界性)

设 X, Y 为赋范空间，称线性算子 $T: X \to Y$ 有界，若存在 $C > 0$ 使得对任意 $x \in X$ 有 $||Tx||_Y \leqslant C||x||_X$. ♣

注 这里的有界性与函数的有界性不同，此处有界性等价于 T 将有界集映为有界集（考虑 S_1 即可）.

命题 2.1 (有界性与连续性的等价)

设 X, Y 为赋范空间，若线性算子 $T: X \to Y$ 有界，则其连续；反之若其在 0 处连续，则其有界. ♠

证明 若 T 有界，则 $||T(x-y)||_Y \leqslant C||x-y||_X$，故其连续，反之设它在 0 处连续，假设它无界，则对任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $x_n \in X$ 使得

$$||Tx_n||_Y > n||x_n||_X \Rightarrow ||Ty_n|| > 1, y_n = \frac{x_n}{n||x_n||_X} \to 0, \tag{2.2}$$

这与 T 在 0 处的连续性矛盾.

定理 2.1

有限维赋范空间 X, Y 之间的线性算子一定有界. ♡

注 事实上，上面的结论可以加强到只有 X 是有限维的情形.

证明 由于有限维空间中的范数等价，因此只需证明欧氏范数下的有界性. 设 $X = K^n, Y = K^m$，则线性算子 $T: X \to Y$ 在一组基下是一个 $m \times n$ 矩阵，借助 Cauchy-Schwarz 不等式可得

$$||Tx||_Y = \left(\sum_{i=1}^m \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\right)^{1/2} \leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)\right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right]^{1/2} ||x||_X \tag{2.3}$$

故它在欧氏范数下有界，得证.

例 2.2 无界算子 设 $X = C^1[0,1], Y = C[0,1]$（赋一致范数），$T = \frac{d}{dt}: X \to Y$，令 $x_n(t) = t^n$，则 $||x_n|| = 1, ||Tx_n|| = n$，故 $||T|| = n \to \infty$，即 T 是无界算子.

定义 2.3 (线性算子空间)

设 X,Y 为赋范空间，记 $\mathcal{L}(X,Y)$ 为从 X 到 Y 的有界线性算子的全体，定义 $\mathcal{L}(X,Y)$ 上的（算子）范数

$$||T|| := \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} = \sup_{||x||_X=1} ||Tx||_Y. \tag{2.4}$$

♣

注 一般简记 $\mathcal{L}(X,X)=\mathcal{L}(X)$ 以及 $\mathcal{L}(X,K)=X^*$，后者称为 X 的对偶空间.

命题 2.2

在算子范数下，$\mathcal{L}(X,Y)$ 为一个赋范空间，并且当 Y 是 Banach 空间时，$\mathcal{L}(X,Y)$ 也是 Banach 空间.

♠

注 因此 X^* 总是 Banach 空间.

证明 赋范空间是显然的，设 Y 完备，$\{T_n\}$ 为 $\mathcal{L}(X,Y)$ 中的 Cauchy 列，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 N 使得对任意 $m,n>N$ 有 $||T_n-T_m||<\varepsilon$，进而对任意 $x\in X$ 有

$$||T_nx-T_mx||_Y \leqslant ||T_n-T_m||\,||x||_X < \varepsilon||x||_X, \tag{2.5}$$

这说明 $\{T_nx\}$ 为 Cauchy 列，故它收敛到 $y\in Y$，定义线性算子 T 为 T_n 的逐点极限，令上式中 $m\to\infty$ 可得 $||T_nx-Tx||\leqslant\varepsilon||x||_X$，因此

$$||Tx|| \leqslant ||Tx-T_nx||+||T_nx|| \leqslant (\varepsilon+||T_N||)||x||_X \Rightarrow T\in\mathcal{L}(X,Y), \tag{2.6}$$

因此 $\mathcal{L}(X,Y)$ 完备.

2.2 Riesz 表示定理及其应用

对于 Hilbert 空间 H，对任意 $y\in H$，定义 $f_y: H\to K$ 为 $f_y(x)=\langle x,y\rangle$，则由于 $|f_y(x)|\leqslant||y||\,||x||$，因此 $f_y\in H^*$ 且 $||f_y||\leqslant||y||$. 事实上，与有限维情形类似，Hilbert 空间的线性泛函都可以表示维内积的情形，即如下 **Riesz 表示定理**.

定理 2.2 (Riesz 表示定理)

设 H 为 Hilbert 空间，则对任意 $f\in H^*$，存在唯一 $y_f\in H$ 使得 $f(x)=\langle x,y_f\rangle$，并且 $||f||=||y_f||$.

♡

证明 【存在性】对于 $f\in\mathcal{L}(X,Y)$，设 $M=\operatorname{Ker} f$，则 f 在 0 处的连续性说明 M 为闭子空间，因此 $X=M\oplus M^\perp$，即对任意 $x\in X$ 有分解（其中任取 $x_0\in M^\perp$ 且 $||x_0||_X=1$）

$$x=y+\alpha x_0\in M\oplus M^\perp \Rightarrow \alpha=\langle x,x_0\rangle, f(x)=f(y)+\alpha f(x_0)=\alpha f(x_0)=f(x_0)\langle x,x_0\rangle, \tag{2.7}$$

因此令 $y_f=\overline{f(x_0)}x_0$ 就有

$$f(x)=\alpha f(x_0)=\langle x,\overline{f(x_0)}x_0\rangle=\langle x,y_f\rangle, \tag{2.8}$$

进一步显然 $||f||\leqslant||y_f||$，并且 $||y_f||=|f(x_0)|\leqslant||f||$，故 y_f 满足要求.

【唯一性】假设存在 y,y' 均满足条件，即对任意 $x\in X$ 有 $f(x)=\langle x,y\rangle=\langle x,y'\rangle$，则 $\langle x,y-y'\rangle=0$，取 $x=y-y'$ 可得 $y=y'$.

定理 2.3

设 H 为 Hilbert 空间，a 为其上的共轭双线性函数，存在 $M>0$ 满足 $|a(x,y)|\leqslant M||x||\,||y||$，则存在唯一 $A\in\mathcal{L}(H)$ 使得 $a(x,y)=\langle x,Ay\rangle$，并且 $||A||=\sup\limits_{x,y\neq0}\frac{|a(x,y)|}{||x||\,||y||}$.

♡

证明 固定 $y\in H$，考虑 $f_y(x)=a(x,y)\in H^*$，由 Riesz 表示定理，存在 $z_y\in H$ 使得 $f_y(x)=\langle x,z_y\rangle$，设线性算子 $A: H\to H, y\mapsto z_y$，则

$$a(x,y)=\langle x,z_y\rangle=\langle x,Ay\rangle \Rightarrow ||Ay||=||z_y||=||f_y||\leqslant M||y|| \Rightarrow ||A||\leqslant M, A\in\mathcal{L}(H), \tag{2.9}$$

最后等式的一边是显然的，另一边有

$$|a(x,y)| = |\langle x, Ay\rangle| \leqslant ||x||\,||Ay|| \leqslant ||x||\,||A||\,||y|| \Rightarrow \sup_{x,y\neq 0} \frac{|a(x,y)|}{||x||\,||y||} \leqslant ||A||. \tag{2.10}$$

2.3 Baire 纲定理

2.3.1 Baire 纲定理

定义 2.4 (疏集)

设 (X,d) 为度量空间，E 为其子集，若 $\overline{E}$ 没有内点，则称 E 为疏集（或无处稠密集）. ♣

例 2.3

- 有限点集是疏集.
- $\mathbb{Q}$ 不是疏集.
- Cantor 集是疏集（并且它是不可数的）.

定义 2.5 (纲集)

- 第一纲集：可数个疏集之并.
- 第二纲集：非第一纲集.
- 剩余集：第一纲集的余集.

♣

例 2.4

- 可数点集是第二纲集.
- 第二纲集中删去第一纲集得到的余集还是第二纲集.

引理 2.1 (闭球套定理)

设 (X,d) 为完备度量空间，$\{B_n\}$ 为一列单调递减（集合的包含意义下）、直径趋于 0 的球，则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \{x\} \subset X$. ♡

证明 设 $B_n = \overline{B(x_n, r_n)}$，则对任意 $n \geqslant m$ 有

$$x_n \in B_n \subset B_m = \overline{B(x_m, r_m)} \Rightarrow d(x_n, x_m) \leqslant r_m, \tag{2.11}$$

因此 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，X 完备说明 $x_n \to x$，B_n 闭说明 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$，若还有 $x' \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$，则

$$d(x,x') \leqslant d(x,x_n) + d(x_n,x') \leqslant 2r_n \to 0, \tag{2.12}$$

因此 $x = x'$.

定理 2.4 (Baire 纲定理)

完备度量空间是第二纲集. ♡

证明 假设完备度量空间 X 是第一纲的，即 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，每个 E_n 都是疏集. 首先任取 $B(x_0, r_0)$，E_1 为疏集说明存在 $B(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0)$ 使得

$$\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E_1} = \emptyset, r_1 < 1 \tag{2.13}$$

这是因为 $(\overline{E_1})^\circ = \emptyset$，存在 $x_1 \in B(x_0, r_0) \backslash \overline{E_1}$，而这是开集，因此存在满足条件的 r_1. 同理，E_2 为疏集说明存在 $B(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1)$ 使得

$$\overline{B(x_2, r_2)} \cap \overline{E_2} = \emptyset, r_2 < \frac{1}{2}, \tag{2.14}$$

以此类推，$\{\overline{B(x_n, r_n)}\}$ 为一列闭球套，故存在 $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n, r_n)}$，但根据球的取法可知对任意 n 有 $\{x\} \cap \overline{E_n} = \emptyset$，因此 $x \notin X$，矛盾.

推论 2.1

设 (X, d) 为完备度量空间，若有闭集分解 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，则必有某个 $\overline{F}_{n_0}$ 有内点.

由于完备空间的闭集完备，因此 Baire 纲定理实际上证明了如下命题：

命题 2.3 (Baire)

设 (X, d) 为完备度量空间，$\{F_n\}$ 为一列闭疏集，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ 也是疏集.

注意到 F_n 为闭疏集当且仅当 F_n^c 为稠密开集，F_n 的并集无内点当且仅当 F_n^c 的交集稠密，因此有如下等价命题

命题 2.4 (Baire)

设 (X, d) 为完备度量空间，$\{U_n\}$ 为一列开稠密集，则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ 也是稠密集.

推论 2.2 (一般 Hamel 基的不可数性)

ℓ^2 的 Hamel 基是不可数集. 更一般地，无穷维 Banach 空间的 Hamel 基也是不可数集.

证明 假设 ℓ^2 的 Hamel 基 $\mathcal{B}$ 为可数集，记 $\mathcal{B} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$，令 $F_n = \mathrm{Span}(x_1, \cdots, x_n)$，则 F_n 为闭集，并且显然 $\ell^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$，因此必定存在某个 $\overline{F}_{n_0}$ 有内点，不妨设 $x \in B(x, r) \subset \overline{F}_{n_0}$，但有矛盾

$$x + \frac{r}{2} \frac{x_{n_0+1}}{||x_{n_0+1}||} \in B(x, r) \backslash F_{n_0}. \tag{2.15}$$

2.3.2 纲推理

数学中有时候可以通过证明某种对象的集合非常“大”以得其存在性，例如证明它是第二纲集，这种方法称为**纲推理**. 例如为说明 $[0, 1]$ 上存在处处连续单处处不可微的函数，可以证明如下命题：

定理 2.5 (Banach,1931)

$[0, 1]$ 上处处连续但处处不可微的函数是第二纲集.

证明 设 $X = (C[0, 1], d)$，A 为 X 中处处不可微的函数的全体，下证 $X \backslash A$ 为第一纲集（则由 X 的完备性可知 A 是第二纲集）. 令

$$A_n = \left\{ f \in X : \exists t \in [0, 1 - \frac{1}{n}] s.t. \sup_{h \in (0, \frac{1}{n})} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| \leqslant n \right\}, \tag{2.16}$$

则 $X \backslash A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，只需证明每个 A_n 都是疏集. 设 $\{f_k\}$ 为 A_n 中收敛到 $f \in X$ 的序列（实际上就是一致收敛），则对任意 $k \in \mathbb{N}$，存在 $t_k \in [0, 1 - 1/n]$ 使得

$$|f_k(t_k + h) - f_k(t_k)| \leqslant nh, \quad \forall h \in (0, \frac{1}{n}), \tag{2.17}$$

则 $\{t_k\}$ 存在收敛子列 $t_{k_j} \to t_0 \in [0, 1 - 1/n]$，并且对任意 $\varepsilon > 0$，可取 j 充分大使得 $|t_0 - t_{k_j}| < \delta(h\varepsilon/4)$（即满足 f 一致连续性的控制），并且 $d(f, f_{k_j}) < h\varepsilon/4$，则

$$\begin{aligned} |f(t_0 + h) - f(t_0)| &\leqslant |f(t_0 + h) - f(t_{k_j} + h)| + |f(t_{k_j} + h) - f_{k_j}(t_{k_j} + h)| && (2.18) \\ &+ |f_{k_j}(t_{k_j} + h) - f_{k_j}(t_{k_j})| + |f_{k_j}(t_{k_j}) - f(t_{k_j})| + |f(t_{k_j}) - f(t_0)| && (2.19) \\ &\leqslant |f(t_0 + h) - f(t_{k_j} + h)| + |f(t_{k_j}) - f(t_0)| + 2d(f, f_{k_j}) + nh && (2.20) \\ &\leqslant \frac{h}{4}\varepsilon + \frac{h}{4}\varepsilon + \frac{h}{2}\varepsilon + nh = (n + \varepsilon)h && (2.21) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |f(t_0+h)-f(t_0)| \leqslant nh, \quad \forall h \in (0, \frac{1}{n}), \tag{2.22}$$

因此 $f \in A_n$，即 A_n 为闭集. 最后证明 $A_n = \overline{A_n}$ 无内点，即对任意 $f \in A_n, \varepsilon > 0$，存在 $\varphi \in B(f, \varepsilon) \backslash A_n$，首先存在 $p \in P[0,1]$ 使得 $d(p, f) < \varepsilon/2$，设 $M = ||p'|| < \infty$，由中值定理可得

$$|p(t+h)-p(t)| \leqslant Mh, \quad \forall h \in (0, \frac{1}{n}), \tag{2.23}$$

设 $g \in X$ 为分段仿射函数（锯齿函数）且满足 $||g|| < \varepsilon/2$，并且各段斜率的绝对值 $> n+M$，令 $\varphi = p+g$，则

$$||\varphi - f|| \leqslant ||p-f|| + ||g|| < \varepsilon \Rightarrow \varphi \in B(f, \varepsilon), \tag{2.24}$$

$$|\varphi'(t)| \geqslant |g'(t)| - |p'(t)| > n \Rightarrow \varphi \notin A_n, \tag{2.25}$$

得证.

2.4 三大定理

2.4.1 共鸣定理/一致有界原理

定理 2.6 (一致有界原理 (Uniform Boundedness Theorem))

设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X, Y)$，若对任意 $x \in X$，$\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} ||Tx|| < \infty$，则 $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} ||T|| < \infty$. ♡

证明 对任意 $n \in \mathbb{N}$，考虑闭集

$$F_n = \{x \in X : \sup_{T \in \mathcal{F}} ||Tx|| \leqslant n\} = \bigcap_{T \in \mathcal{F}} \{x \in X : ||Tx|| \leqslant n\} = \bigcap_{T \in \mathcal{T}} T^{-1}(\overline{B_Y(0,n)}) \tag{2.26}$$

则 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. 由 Baier 纲定理，必定存在某个 F_{n_0} 有内点，即存在 $x_0 \in B(x_0, r) \subset F_{n_0}$，因此对任意 $x \in S_1, T \in \mathcal{F}$ 有

$$||T(x_0 + rx)|| \leqslant n_0 \Rightarrow ||Tx|| \leqslant \frac{1}{r}(n_0 + ||Tx_0||) \leqslant \frac{2n_0}{r} \tag{2.27}$$

$$\Rightarrow ||T|| = \sup_{x \in S_1} ||Tx|| \leqslant \frac{2n_0}{r}, \tag{2.28}$$

对 T 取上确界得证.

上述定理有一个等价形式，也因此被称为共鸣定理.

定理 2.7 (共鸣定理)

设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(X, Y)$，若 $\sup\limits_{T \in \mathcal{F}} ||T|| = \infty$，则存在 $x_0 \in X$，使得

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} ||Tx_0|| = \infty. \tag{2.29}$$

♡

定理 2.8 (Banach-Steinhaus)

设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$T, T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$，则 $T_n x \to Tx, \forall x \in X$ 当且仅当 $\sup_n ||T_n|| < \infty$ 且存在 X 的稠密子空间 M 使得 $T_n x \to Tx, \forall x \in M$. ♡

注 该定理说明线性算子的逐点收敛可以由它的一致有界性和在一个稠密子集上的逐点收敛性刻画.

证明 $\Rightarrow$：显然的.

$\Leftarrow$：令 $C = \sup_n ||T_n||$，对任意 $\varepsilon > 0, x \in X$，存在 $y \in M$ 使得 $||x-y|| < \varepsilon/(4(||T||+C))$，同时当 n 充分大时有 $||T_n y - Ty|| < \varepsilon/2$，因此

$$||T_n x - Tx|| \leqslant ||T_n(x-y)|| + ||T_n y - Ty|| + ||T(y-x)|| \tag{2.30}$$

$$\leqslant ||T_n|| \, ||x-y|| + ||T_n y - Ty|| + ||T|| \, ||x-y|| \tag{2.31}$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.32}$$

$$= \varepsilon. \tag{2.33}$$

定理 2.9 (Du Bois-Reymond,1876)

存在 $f \in C(T)$，使得 $\{S_N(f)(0)\}$ 发散，其中 S_N 为 Fourier 级数的部分和.

证明 $S_N(f) = f * D_N$，其中 $D_N(t) = \frac{\sin[(2N+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}$ 为 Dirichlet 核. 令 $T_N = S_N|_{x=0} : C(T) \to \mathbb{R}$，则

$$|T_N(f)| = |S_N(f)(0)| = \left| \int_{-1/2}^{1/2} f(t)D_N(-t)dt \right| \leqslant ||D_N||_1||f|| \Rightarrow ||T_N|| \leqslant ||D_N||_1, T_N \in C(T)^*, \tag{2.34}$$

由共鸣定理，只需证明 $\sup_N ||T_N|| = \infty$，断言 $||T_N|| = ||D_N||_1$（进而 $||D_N||_1 \geqslant CH_N$，H_N 为调和级数的部分和，故 $\sup_N ||T_N|| = \sup_N ||D_N||_1 = \infty$）.

由于 $\operatorname{sgn} D_N$ 在 $[-1/2, 1/2]$ 上至多有限个间断点（因为 $D_N(x)$ 在区间中至多有限个零点），因此可考虑 $f(x) = \operatorname{sgn} D_N(x)$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在分段线性函数 $f_\varepsilon \in C(T)$ 使得 $||f_\varepsilon||_1 = 1$，并且存在开集 I_ε，使得

$$f_\varepsilon|_{[-1/2,1/2]\setminus I_\varepsilon} = f, \quad m(I_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2N+1}, \tag{2.35}$$

则有（注意 $|D_N(x)| \leqslant 2N+1$）

$$||T_N|| \geqslant |T_N(f_\varepsilon)| \geqslant |T_N(f)| - |T_N(f_\varepsilon) - T_N(f)| \geqslant ||D_N||_1 - \varepsilon \tag{2.36}$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得.

2.4.2 开映射定理

对于算子方程 $Tx = y$，有时会关注解的稳定性，而这实际上等价于 T^{-1} 的连续性.

定理 2.10 (逆算子定理)

设 X, Y 为 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 为双射，则 $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$.

上述定理有更一般的推广，称为开映射定理（注意到 T 为双射时，T^{-1} 的连续性等价于 T 的开性）.

定理 2.11 (开映射定理 (Open Mapping Theorem))

设 X, Y 为 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 为满射，则 T 是开映射.

证明 设 U 为 X 中的开集，对任意 $y = Tx \in T(U)$，作平移 $V = U - x$，则借助算子的线性性，问题化归到：T 是否将 0_X 的开邻域 B_X 映为 0_Y 的开邻域？这时若存在 $\delta B_Y \subset T(B_X)$，加上存在 $tB_X \subset V$（$0 \in V^\circ$），则有

$$t\delta B_Y \subset T(tB_X) \subset T(V) \Rightarrow B(y, t\delta) = y + t\delta B_Y \subset T(x+V) = T(U), \tag{2.37}$$

即得 $y \in T(U)^\circ$，说明 $T(U)$ 为开集. 因此只需证明下面的引理：

引理 2.2

设 X, Y 为 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ 为满射，则存在 $\delta > 0$ 使得 $\delta B_Y \subset T(B_X)$（$B_X, B_Y$ 均为单位球）.

证明 【STEP 1. 证明存在 $r > 0$ 使得 $rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$】

由于 $X = \bigcup_{n=1}^\infty nB_X$，$T$ 为满射说明 $Y = T(X) = \bigcup_{n=1}^\infty T(nB_X) = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{T(nB_x)}$，由 Baire 纲定理，必有某个 $\overline{T(n_0B_x)}$ 有内点，即存在 $B(y_0, t) \subset \overline{T(n_0B_x)}$，则对任意 $y \in tB_Y$ 有

$$y_0 + y, y_0 - y \in \overline{B(y_0, t)} \subset \overline{T(n_0B_X)}, \tag{2.38}$$

因此存在 $\{x_n\}, \{x_n'\} \subset n_0B_x$ 使得 $Tx_n \to y_0 + y, Tx_n' \to y_0 - y$，进而

$$\overline{T(n_0B_X)} \supset T\left(\frac{x_n - x_n'}{2}\right) \to y \Rightarrow y \in \overline{T(B_X)} \tag{2.39}$$

这说明 $tB_Y \subset \overline{T(n_0B_X)}$，令 $r = t/n_0$ 即得 $rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$.

【STEP 2. 令 $\delta = r/3$，证明 $\delta B_Y \subset T(B_X)$，即对任意 $y \in \delta B_Y$，存在 $x \in B_X$ 使得 $Tx = y$】

下面采用逐次逼近法，构造级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in B_X$，使其像恰好为 $y = Tx \in T(B_X)$.

对任意 $y \in \delta B_Y$ 有 $3y \in rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$，即存在 $\tilde{x}_1 \in B_X$ 使得

$$||3y - T\tilde{x}_1|| < \delta \Rightarrow ||\underbrace{y - Tx_1}_{y_1}|| < \frac{\delta}{3} = r, \quad x_1 \in 3^{-1}B_X, \tag{2.40}$$

因此 $3y_1 \in \delta B_Y, 3^2y_1 \in rB_Y \subset \overline{T(B_X)}$，即存在 $\tilde{x}_2 \in B_X, x_2 \in 3^{-2}B_X$ 使得

$$||3^2y_1 - T\tilde{x}_2|| < \delta \Rightarrow ||\underbrace{y_1 - Tx_2}_{y_2}|| < \frac{\delta}{3^2}, \tag{2.41}$$

以此类推，记 $y_n = y_{n-1} - Tx_n \in 3^{-n}\delta B_Y$，则存在 $x_{n+1} \in 3^{-(n+1)}B_X$ 使得

$$||y_n - Tx_{n+1}|| < \frac{\delta}{3^{n+1}} \Rightarrow \left|\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right|\right| < \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{2^{n+1}}, \tag{2.42}$$

由 X 的完备性可知 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k := x \in X$，并且当 N 充分大时

$$||x|| \leqslant \left|\left|x - \sum_{k=1}^{N} x_k\right|\right| + \left|\left|\sum_{k=1}^{N} x_k\right|\right| < 1 \Rightarrow x \in B_X, \tag{2.43}$$

进一步可得

$$\frac{\delta}{3^n} > ||y_n|| = ||y_{n-1} - Tx_n|| = \cdots = ||y - T(x_1 + \cdots + x_n)|| \Rightarrow T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \to y = Tx, \tag{2.44}$$

即对任意 $y \in \delta B_Y$，存在 $x \in B_X$ 使得 $Tx = y$，得证.

定理 2.12 (Lax-Milgram)

设 H 为 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot)$ 为共轭双线性函数满足

- 存在 $C > 0$ 使得 $|a(x,y)| \leqslant C||x||\,||y||, \forall x, y \in H$.
- 存在 $\delta > 0$ 使得 $|a(x,x)| \geqslant \delta||x||^2, \forall x \in H$.

则存在唯一 $A \in \mathcal{L}(H)$ 使得 $a(x,y) = \langle x, Ay\rangle$，并且 $||A^{-1}|| \leqslant \delta^{-1}$.

证明 前半部分根据 Riesz 表示定理易得，下证后半部分.

- A 单：对任一 $x \in \operatorname{Ker} A$ 都有 $|\langle Ax, x\rangle| \geqslant \delta||x||^2 \geqslant 0$，当且仅当 $x = 0$ 时取等.
- A 满：首先证明 $\operatorname{Im} A$ 闭，设 $\{Ax_n\} \subset \operatorname{Im} A$ 收敛到 y，则

$$\delta||x_n - x_m||^2 \leqslant |\langle x_n - x_m, A(x_n - x_m)\rangle| \leqslant ||Ax_n - Ax_m||\,||x_n - x_m|| \Rightarrow ||x_n - x_m|| \leqslant \frac{1}{\delta}||Ax_n - Ax_m||, \tag{2.45}$$

  因此 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列，由完备性可得 $x_n \to x_0 \in H$，因此 $Ax_n \to Ax_0 = y \in \operatorname{Im} f$. 再证 $(\operatorname{Im} A)^{\perp} = \{0\}$，设 $x \in (\operatorname{Im} A)^{\perp}$，则必有 $\langle x, Ax\rangle = 0$，因此 $\delta||x||^2 = 0$，说明 $x = 0$，因此 $\operatorname{Im} A = H$，A 满.
- A^{-1} 连续：由开映射定理易得，对其算子范数的估计亦然.

定理 2.13 (等价范数定理)

若线性空间 X 上有范数 $||\cdot||_1 \lesssim ||\cdot||_2$，并且在二者下都构成 Banach 空间，则 $||\cdot||_1 \approx ||\cdot||_2$.

证明 $||\cdot||_1 \lesssim ||\cdot||_2$ 等价于 $\mathrm{Id} \in \mathcal{L}((X, ||\cdot||_2), (X, ||\cdot||_1))$，根据逆算子定理有 $\mathrm{Id} \in \mathcal{L}((X, ||\cdot||_1), (X, ||\cdot||_2))$，因此二者等价.

2.4.3 闭图像定理

命题 2.5 (乘积空间的完备性)

设 X,Y 为 Banach 空间，在 $X\times Y$ 上赋范 $||(x,y)||_{X\times Y}=||x||_X+||y||_Y$，则 $(X\times Y,||\cdot||_{X\times Y})$ 也是 Banach 空间.

定义 2.6 (图像 & 闭算子)

设 $T:X\to Y$ 为线性算子，定义其图像为

$$\mathrm{Gr}(T)=\{(x,Tx):x\in\mathrm{Dom}(T)\},\tag{2.46}$$

若 $\mathrm{Gr}(T)$ 为 $X\times Y$ 的闭子空间，则称 T 为闭算子.

注 一般 $\mathrm{Dom}(T)$ 不一定是闭的.

引理 2.3

T 为闭算子当且仅当对任意 $\mathrm{Dom}(T)\ni x_n\to x, Tx_n\to y$，都有 $x\in\mathrm{Dom}(T), y=Tx$.

证明 条件相当于 $(x_n,Tx_n)\to(x,y)=(x,Tx)\in\mathrm{Gr}(T)$.

例 2.5 无界闭算子 $\frac{d}{dt}:C[0,1]\to C[0,1],\mathrm{Dom}(\frac{d}{dt})=C^1[0,1]$ 是无界闭算子，无界性已证，对任意 $\mathrm{Dom}(\frac{d}{dt})\ni u_n\to u,u_n'\to v$，有（注意到 $C[0,1]$ 中的收敛实际上是一致收敛）

$$u_n(t)-u_n(0)=\int_0^t u_n'(s)ds\Rightarrow u(t)-u(0)=\int_0^t v(s)ds,\tag{2.47}$$

因此 $v=u'$，说明 $(u,v)\in\mathrm{Gr}(\frac{d}{dt})$，即 $\frac{d}{dt}$ 闭.

命题 2.6

若 $T:X\to Y$ 有界，$\mathrm{Dom}(T)$ 是闭子空间，则 T 是闭算子.

定理 2.14 (Bounded Linear Transformation)

设 X 为赋范空间，Y 为 Banach 空间，则任意 $T\in\mathcal{L}(\mathrm{Dom}(T),Y)$ 能唯一保泛延拓为 $\widetilde{T}\in\mathcal{L}(\overline{\mathrm{Dom}(T)},Y)$.

证明 对任意 $x\in\overline{\mathrm{Dom}(T)}$，存在 $\mathrm{Dom}(T)\ni x_n\to x$，而

$$||Tx_n-Tx_m||\leqslant||T||\,||x_n-x_m||\to 0,\tag{2.48}$$

因此由 Y 的完备性可得 $Tx_n\to y\in Y$，因此可定义 $\widetilde{T}x=y$，线性性显然，良定性易证. 并且

$$||\widetilde{T}x||=||y||=\lim_{n\to\infty}||Tx_n||\leqslant||T||\lim_{n\to\infty}||x_n||=||T||\,||x||,\tag{2.49}$$

因此 $||\widetilde{T}||\leqslant||T||<\infty$，而 $||T||\leqslant||\widetilde{T}||$ 是显然的，得证.

例 2.6 对于 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$，可作 Fourier 变换

$$\mathcal{F}(f)(\xi)=\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx,\tag{2.50}$$

则 Fourier 变换可以延拓到 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中. 首先 $L^1\cap L^2\subset L^2$ 且稠密，并且有 Plancherel 等式有 $||\mathcal{F}(f)||_2=||f||_2$，因此 $\mathcal{F}\in\mathcal{L}((L^1\cap L^2,||\cdot||_2),L^2)$，根据 B.L.T.，它可以唯一延拓为 $\mathcal{F}\in\mathcal{L}(L^2)$.

定理 2.15 (闭图像定理 (Closed Graph Theorem))

设 X,Y 为 Banach 空间，$T:X\to Y$ 为闭线性算子，若 $\mathrm{Dom}(T)$ 为闭集，则 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$.

证明 【证明 1】这时 $\mathrm{Gr}(T)$ 为 $X\times Y$ 的闭子空间，因此 $(\mathrm{Gr}(T),||\cdot||_{X\times Y})$ 为 $X\times Y$ 的闭子空间，并且投影映射 π_1,π_2 均连续，π_1 为双射，由逆算子定理可知 π^{-1} 连续，因此 $T=\pi_2\circ\pi_1^{-1}$ 连续（上面用到了 $(\mathrm{Dom}(T),||\cdot||_X)$

的完备性）.

【证明 2】由于 $(\mathrm{Dom}(T), ||\cdot||_X)$ 为 Banach 空间，在 $\mathrm{Dom}(T)$ 上定义“图像范数”

$$||x||_G := ||x||_X + ||Tx||_Y, \tag{2.51}$$

则 $||x_m - x_n||_G \to 0$ 说明 $\{x_n\}, \{Tx_n\}$ 均为 Cauchy 列，因此 $x_n \to x, Tx_n \to y$，T 为闭算子说明 $y = Tx$，因此 x 即为 $\{x_n\}$ 在图像范数下的极限，说明图像范数完备，由等价范数定理可知 $||\cdot||_G \approx ||\cdot||$，因此存在 C 使得

$$||x||_X + ||Tx||_Y \leqslant C||x||_X \Rightarrow ||T|| \leqslant C - 1 < \infty \Rightarrow T \in \mathcal{L}(X, Y). \tag{2.52}$$

推论 2.3 (Hellinger-Toeplitz)

设 H 为 Hilbert 空间，$T : H \to H$ 为自伴线性算子（即 $\langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle$），则 T 有界.

证明 设 $x_n \to x, Tx_n \to y$，则对任意 $z \in H$ 有

$$\langle z, Tx\rangle = \langle Tz, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tz, x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z, Tx_n\rangle = \langle z, y\rangle, \tag{2.53}$$

因此 $y = Tx$，即 T 为闭算子，再加上 $\mathrm{Dom}(T) = H$ 闭，由闭图像定理可得 T 连续.

¶ 一些小结论

命题 2.7

设 X, Y 为赋范空间，D 为 X 的子空间，$A : D \to Y$ 为线性映射，则

1. 若 A 连续，D 闭，则 A 是闭算子.
2. 若 A 为连续闭算子，则 Y 完备 $\Rightarrow D$ 闭.
3. 若 A 为单闭算子，则 A^{-1} 也是闭算子.
4. 若 X 完备，A 为单闭算子，$\overline{R(A)} = Y$，A^{-1} 连续，则 $R(A) = Y$.

证明

1. 对任意 $D \ni x_n \to x, Ax_n \to y$，$D$ 闭说明 $x \in D$，A 连续说明 $Ax_n \to Ax = y$，因此 $(x, y) = (x, Ax) \in Gr(A)$，即 A 是闭算子.
2. 对任意 $D \ni x_n \to x$，A 连续说明 $||Ax_n - Ax_m|| \leqslant ||A||\,||x_n - x_m|| \to 0$，即 $\{Ax_n\}$ 为 Y 中的 Cauchy 列，因此存在 $y \in Y$ 使得 $Ax_n \to y$，由于 A 是闭算子，因此有 $(x, y) \in Gr(A)$，即 $x \in D$，说明 D 为闭集.
3. A 为单射说明可以定义线性算子 $A^{-1} : Ran(A) \to X$（并且它也是单射），对任意 $Ran(A) \ni y_n \to y, A^{-1}y_n \to x$，记 $x_n = A^{-1}y_n$，则这等价于 $Ax_n = y_n \to y, x_n \to x$，由 A 的闭性可得 $y = Ax$，因此 $x = A^{-1}y$，说明 $(y, x) \in Gr(A^{-1})$，因此 A^{-1} 为闭算子.
4. 这时 $A^{-1} : Ran(A) \to X$ 为连续闭算子（由 3），X 完备说明 $Dom(A^{-1}) = Ran(A)$ 为闭集（由 2），$Ran(A) = \overline{Ran(A)} = Y$.

2.5 Hahn-Banach 定理

2.5.1 实复向量空间形式

定义 2.7 (次线性泛函 (sublinear functional))

设 X 为向量空间，若函数 $p : X \to \mathbb{R}$ 满足

- 正齐次性：对任意 $t \geqslant 0$ 有 $p(tx) = tp(x)$.
- 次可加性：$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$.

则称 p 为 X 上的次线性泛函.

注 若 p 还满足 $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$，则称 p 是一个半范数. 并且半范数一定是非负的，因为 $0=p(0)\leqslant p(x)+p(-x)=2p(x)$. 此外半范数一般不满足 $p(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

定理 2.16 (实 Hahn-Banach 定理)

设 X 为实向量空间，M 为其子空间，p 为 X 上的次线性泛函，f 为 M 上的线性泛函，满足 $f(x)\leqslant p(x)$，则 f 可以延拓为 X 上的线性泛函 F，满足

1. $F|_M=f$.
2. $F(x)\leqslant p(x),\forall x\in X$.

♡

证明 【STEP 1. 证明 f 可以延拓到 $\widetilde{M}=M\oplus\langle x_0\rangle$ 上】

首先对任意 $x,y\in M$ 有

$$f(x)+f(y)=f(x+y)\leqslant p(x+y)\leqslant p(x-x_0)+p(y+x_0) \tag{2.54}$$

$$\Rightarrow f(x)-p(x-x_0)\leqslant p(y+x_0)-f(y) \tag{2.55}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in M}[f(x)-p(x-x_0)]\leqslant \inf_{y\in M}[p(y+x_0)-f(y)], \tag{2.56}$$

因此存在 $\beta\in\mathbb{R}$ 使得

$$f(x)-p(x-x_0)\leqslant\beta\leqslant p(y+x_0)-f(y), \tag{2.57}$$

定义延拓 $\tilde{f}(x_0)=\beta$，则对任意 $x\in M,\lambda>0$ 都有

$$\tilde{f}(x+\lambda x_0)=\lambda(f(x/\lambda)+\beta)\leqslant\lambda p(x/\lambda+x_0)=p(x+\lambda x_0), \tag{2.58}$$

$$\tilde{f}(x-\lambda x_0)=\lambda(f(x/\lambda)-\beta)\leqslant\lambda p(x/\lambda-x_0)=p(x-\lambda x_0), \tag{2.59}$$

即得满足条件的延拓 $\tilde{f}$. 进一步可知，f 可以向外延拓任意有限维.

【STEP 2. 借助 Zorn 引理证明一般情形】

设 $M\leqslant N\leqslant X$，若 N 上存在 f 的延拓 f_N，则取对 (N,f_N)，令 $\mathscr{X}$ 为这种对的全体，定义其上的偏序

$$(N_1,f_1)\leqslant(N_2,f_2)\Leftrightarrow N_1\leqslant N_2, f_2|_{N_1}=f_1, \tag{2.60}$$

则对其中任意全序子集 $\{(N_i,f_i)\}$，取 $N=\bigcup_i N_i, f_N=\bigcup_i f_i$（即对任意 $x\in N$，若 $x\in N_i$ 则定义 $f_N(x)=f_i(x)$），它是该子集的上界，因此 $\mathscr{X}$ 有极大元 (K,f_K)，易知 $K=X$，（否则可以将其向外延拓一维，与极大性矛盾），故 $f_K=F$ 即为所需延拓.

定理 2.17 (复 Hahn-Banach 定理)

设 X 为复向量空间，M 为其子空间，p 为 X 上的半范数，f 为 M 上的线性泛函，满足 $|f(x)|\leqslant p(x)$，则 f 可以延拓为 X 上的线性泛函 F，满足

1. $F|_M=f$.
2. $|F(x)|\leqslant p(x),\forall x\in X$.

♡

证明 首先将 X,M 视为实向量空间，并且令 $g(x)=\operatorname{Re}f(x)$，则由实 H-B 定理可得延拓 $G(x)$，注意到对任意复线性泛函 h 有 $\operatorname{Im}h(x)=-\operatorname{Im}ih(ix)=-\operatorname{Re}h(ix)$，因此令 $F(x)=G(x)-iG(ix)$ 可得

$$F(ix)=G(ix)+iG(x)=i[G(x)-iG(ix)]=iF(x),\quad \forall x\in X, \tag{2.61}$$

即 F 为复线性泛函，并且设 $\arg F=\theta$ 可得

$$F(x)=g(x)-ig(ix)=f(x),\quad \forall x\in M, \tag{2.62}$$

$$|F(x)|=e^{-i\theta}F(x)=F(e^{-i\theta}x)=G(e^{i\theta}x)\leqslant p(e^{i\theta}x)=p(x),\quad \forall x\in X, \tag{2.63}$$

因此 F 为满足要求的延拓（注意 $F(e^{-i\theta}x)=|F(x)|$ 的虚部为 0）.

推论 2.4 (赋范空间中的 Hahn-Banach 定理)
设 X 为赋范空间，M 为其子空间，则对任意 $f \in M^*$，存在 $F \in X^*$ 使得

1. $F|_M = f$.
2. $||F||_X = ||f||_M$.

注 这一延拓也被称为保范延拓.

证明 构造 X 上的半范数 $p(x) = ||f||_M ||x||$，必然存在 X 上的线性泛函 F 使得

$$F|_M = f, \quad |F(x)| \leqslant p(x), \forall x \in X, \tag{2.64}$$

因此 $||F||_X \leqslant ||f||_M$，但另一方面显然 $||f||_M = ||F|_M||_M \leqslant ||F||_X$，因此 $||F||_X = ||f||_M$，得证.

例 2.7 Hahn-Banach 定理中的延拓一般不是唯一的，一方面从实情形证明中 β 的选取可以看出，另一方面可以考虑保泛延拓的例子：对于 $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)$，令 $M = \mathbb{R} \times \{0\}$，定义 $f(x_1, 0) = x_1$ 有 $F_t(x_1, x_2) = x_1 + tx_2$，则对任意 $t \in (-1, 1)$，$F_t|_M = f$，并且

$$|F_t(x_1, x_2)| \leqslant |x_1| + |t|\,|x_2| \leqslant |x_1| + |x_2| = ||(x_1, x_2)||_1 \Rightarrow ||F_t||_X = 1 = ||f||_M, \tag{2.65}$$

因此 f 的保范延拓不唯一.

推论 2.5
设 X 为赋范空间，对任意 $x_0 \in X$，存在 $f \in X^*$ 使得 $||f|| = 1$ 以及 $f(x_0) = ||x_0||$.

证明 令 $M = \mathrm{Span}(x_0)$，定义 $f_0 \in M^*, f_0(\lambda x_0) = \lambda ||x_0||$，则 $||f_0||_M = 1$，Hahn-Banach 定理说明存在保范延拓 f 满足条件.

推论 2.6
设 X 为赋范空间.

- 若 $X \neq \{0\}$，则 $X^* \neq \{0\}$.
- 对任意 $x \neq y \in X$，存在 $f \in X^*$ 使得 $f(x) \neq f(y)$.
- 对于 $x \in X$，若对任意 $f \in X^*$ 都有 $f(x) = 0$，则 $x = 0$.

推论 2.7 (用泛函刻画范数)
设 X 为赋范空间，则对任意 $x \in X$，$||x|| = \sup\limits_{f \in X^*, ||f||=1} |f(x)|$.

证明 首先对任意 $||f|| = 1$ 有

$$|f(x)| \leqslant ||f||\,|x| = |x| \Rightarrow \sup_{\substack{f \in X^* \\ ||f||=1}} |f(x)| \leqslant ||x||, \tag{2.66}$$

另一方面，存在 $f \in X^*, ||f|| = 1, |f(x)| = ||x||$，因此上式可取等.

定理 2.18 (泛函分离闭集与单点)
设 X 为赋范线性空间，M 为其子空间，则对任意 $x_0 \in X, d := d(x_0, M) > 0$，存在 $f \in X^*$ 使得

$$||f|| = 1, \quad f(M) = \{0\}, \quad f(x_0) = d. \tag{2.67}$$

证明 令 $\widetilde{M} = M \oplus \mathrm{Span}(x_0)$，定义 $f_0 : \widetilde{M} \to F$，$f(y + \lambda x_0) = \lambda d$，则 $f_0(M) = \{0\}, f_0(x_0) = d$，对任意 $x = y + \lambda x_0 \in \widetilde{M}$ 有

$$|f_0(x)| = |\lambda| d \leqslant |\lambda|\,||x_0 + \frac{y}{\lambda}|| = ||x|| \Rightarrow ||f_0|| \leqslant 1, f_0 \in \widetilde{M}^*, \tag{2.68}$$

因此存在延拓 $f \in X^*$ 满足

$$f|_{\widetilde{M}} = f_0, f(M) = \{0\}, f(x_0) = d, ||f|| = ||f_0|| \leqslant 1, \tag{2.69}$$

只需证明 $||f|| \geqslant 1$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $y_n \in M$ 使得 $||x_0 - y_n|| \leqslant d + \frac{1}{n}$，因此

$$||f|| \geqslant \frac{|f(x_0 - y_n)|}{||x_0 - y_n||} \geqslant \frac{d}{d + \frac{1}{n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{nd}}, \tag{2.70}$$

令 $n \to \infty$ 即得.

推论 2.8

设 X 为赋范空间，M 为其子空间，则对任意 $x \in X$，$x \in \overline{M}$ 当且仅当对任意 $f \in X^*, f(M) = 0$ 都有 $f(x_0) = 0$.

证明 一边显然；对于另一边，若 $x_0 \notin \overline{M}$，则存在 $f \in X^*$ 使得 $f(M) = 0, f(x_0) = d(x_0, M) > 0$，矛盾.

2.5.2 几何形式：凸集分离定理

¶ 凸集

定义 2.8 (凸集)

设 X 为向量空间，$C \subset X$，若对任意 $x, y \in C, t \in [0,1]$，$tx + (1-t)y \in C$，则称 C 为凸集；若还有 $C = -C$ 则称为对称凸集；若对任意 $x \in X$，存在 $t > 0$ 使得 $\frac{x}{t} \in C$，则称为吸收凸集.

注 显然凸集的任意交还是凸集.

定义 2.9 (凸包)

设 X 为向量空间，$A \subset X$，定义 $\mathrm{conv}(A) = \bigcap_{A \subset C 凸} C$ 为 A 的凸包（即包含 A 的最小凸集）.

对于 $x_1, \cdots, x_n \in X$，可定义其**凸组合**为

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}. \tag{2.71}$$

命题 2.8

$\mathrm{conv}(A) = \{A 中向量的凸组合\}$.

定义 2.10 (Minkovski 泛函)

设 X 为向量空间，C 为包含 0 的凸集，定义

$$P_C : X \longrightarrow [0, +\infty] \tag{2.72}$$

$$x \longmapsto \inf\{t > 0 : \frac{1}{t} x \in C\} \tag{2.73}$$

称为 C 上的 Minkovski 泛函.

注 $P_C(x) = +\infty$ 当且仅当 $\{t > 0 : \frac{1}{t} x \in C\} = \emptyset$.

命题 2.9 (Minkovski 泛函是次线性泛函)

- $P_C(0) = 0$.
- 正齐次性：$P_C(tx) = tP_C(x), \forall x \in X, t > 0$.
- 次可加性：$P_C(x + y) \leqslant P_C(x) + P_C(y)$.

证明 只证最后一条，对任意 $x, y \in X, \varepsilon > 0$，令

$$\lambda = P_C(x) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu = P_C(y) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.74}$$

则 $x/\lambda, y/\mu \in C$，而

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\frac{x}{\lambda} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\frac{y}{\mu} \in C, \tag{2.75}$$

因此

$$P_C(x+y) \leqslant \lambda+\mu \leqslant P_C(x)+P_C(y)+\varepsilon, \tag{2.76}$$

由 ε 任意性即得.

定义 2.11 (均衡集)

设 X 为复向量空间，若对任意 $x\in C, \theta\in\mathbb{R}$ 都有 $e^{i\theta}x\in C$，则称 C 是均衡集.

命题 2.10

复向量空间中的每个均衡吸收凸集都决定了一个半范数.

证明 吸收保证了 $p_C<\infty$，均衡保证了 $p_C(tx)=|t|p_C(x)$.

命题 2.11 (Minkovski 泛函连续的刻画)

设 C 为吸收凸集，则 p_C 连续当且仅当 0 为 C 的内点.

证明 $\Rightarrow$：一方面显然 $C^\circ \subset \{x : p_C(x) < 1\} = p_C^{-1}((-\infty,1))$，而 $p_C((-\infty,1)) \subset C$，因此 p_C 连续说明 $p_C((-\infty,1)) \subset C^\circ$，因此 $C^\circ = \{x : p_C(x) < 1\}$，因此 $0 \in C^\circ$.

$\Leftarrow$：首先证明 0 处的连续性，$0\in C^\circ$ 说明对任意 $\varepsilon>0$，εC 也是 0 的邻域，因此对任意 $x\in\varepsilon C$ 有

$$|p_C(x)| = \varepsilon\left|p_C\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \leqslant \varepsilon, \tag{2.77}$$

因此 p_C 在 0 处连续.

由次线性性可得对任意 x, y 有

$$p_C(x) \leqslant p_C(x-y)+p_C(y), \tag{2.78}$$

$$p_C(y) \leqslant p_C(y-x)+p_C(x) \tag{2.79}$$

$$\Rightarrow |p_C(x)-p_C(y)| \leqslant \max\{p_C(x-y), p_C(y-x)\}, \tag{2.80}$$

根据 0 附近的连续性可得 p_C 的（一致）连续性.

¶ 超平面分离凸集

定义 2.12 (极大子空间)

设 X 为实向量空间，称 $M\subset X$ 为 X 的极大子空间，若对任意 $M\subsetneq Y\subset X$ 都有 $Y=X$.

命题 2.12 (极大子空间的等价刻画)

M 为 X 的极大子空间当且仅当存在 $x_0\in X$ 使得 $X = M\oplus \mathrm{Span}(x_0)$，也当且仅当 $\operatorname{codim} M := \dim X/M = 1$.

定义 2.13 (超平面)

称线性空间中极大子空间的平移为超平面.

对线性泛函 f，记 $H_f^r = f^{-1}(r)$，下述命题说明超平面必定是这种形式.

命题 2.13 (超平面的形式)

L 为超平面当且仅当存在线性泛函 f 以及 $r \in \mathbb{R}$ 使得 $L = H_f^r$.

注 特别地，超平面 H_f^r 是闭的当且仅当 $f \in X^*$.

证明 $\Leftarrow$：注意 $H_f^0 = \operatorname{Ker} f$，断言它是极大子空间（则 H_f^r 是它的平移），取 $x_0 \in X \backslash H_f^0$，则对任意 $x \in X$ 有

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{f(x)}{f(x_0)} x_0 \in H_f^0 \Rightarrow X = H_f^0 \oplus \operatorname{Span}(x_0), \tag{2.81}$$

说明 H_f^0 极大.

$\Rightarrow$：设 $L = M + a$ 为超平面，M 为极大子空间，则存在 x_0 使得 $X = M \oplus \operatorname{Span}(x_0)$，定义 $f \in X^*, f(y + \lambda x_0) = \lambda$，则 $f(M) = 0, f(x_0) = 1$，$M = \operatorname{Ker} f = H_f^0, L = f^{-1}(f(a)) = H_f^{f(a)}$.

定义 2.14 (超平面的分离)

设 X 为实向量空间，$A, B \subset X$.

1. 称 H_f^r 分离 A, B，若 $f(A) \leqslant r \leqslant f(B)$（也可通过取上下确界来描述）.
2. 称 H_f^r 严格分离 A, B，若上面的不等号（确界情形）是严格的.

定理 2.19 (凸集与点的分离)

设 X 为实赋范空间，C 为有内点的凸集，$x_0 \notin C$，则存在闭超平面 H_f^r 分离 C, x_0.

证明 不妨设 0 为 C 的内点，则 P_C 为次线性泛函，$\overline{C} = \{x \in X : P_C(x) \leqslant 1\}$，因此 $x_0 \notin C$ 说明 $P_C(x_0) \geqslant 1$，令 $M = \operatorname{Span}(x_0), f_0 \in M^*$ 使得 $f_0(\lambda x_0) = \lambda P_C(x_0)$，则

$$f_0 \in \operatorname{Span}(x_0)^*, f_0(x) \leqslant P_C(x), \forall x \in M, \tag{2.82}$$

由 Hahn-Banach 定理，f_0 可以延拓为 $f \in X^*$，满足

$$f(x) \leqslant P_C(x) \leqslant 1 \leqslant P_C(x_0) = f(x_0) \quad \forall x \in C, \tag{2.83}$$

因此 H_f^1 分离 C, x_0.

定理 2.20 (凸集分离定理 1)

设 X 为实赋范空间，A 为开凸集，B 为凸集，$A \cap B = \emptyset$，则存在闭超平面 H_f^r 分离 A, B.

证明 考虑不包含 0 的开凸集 $C = A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$，则存在闭 H_f^0 分离 $C, 0$，即得

$$\sup_{z \in C} f(z) \leqslant 0 = f(0) \Leftrightarrow \sup_{x \in A} f(x) \leqslant \inf_{y \in B} f(y), \tag{2.84}$$

令 $r = \frac{1}{2}[\sup\limits_{x \in A} f(x) + \inf\limits_{y \in B} f(y)]$，则 H_f^r 分离 A, B.

定理 2.21 (凸集分离定理 2)

设 X 为实赋范空间，A 为闭凸集，B 为紧凸集，$A \cap B = \emptyset$，则存在闭超平面 H_f^r 严格分离 A, B.

证明 设 $\varepsilon := \frac{1}{3} d(A, B) > 0$，则 $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon), B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$ 是无交开凸集，由前述定理可得闭 H_f^r 分离 $A_\varepsilon, B_\varepsilon$，即

$$\sup_{x \in A_\varepsilon} f(x) \leqslant r \leqslant \inf_{y \in B_\varepsilon} f(y) \Rightarrow f(x + \varepsilon z) \leqslant r \leqslant f(y + \varepsilon z), \forall x \in A, y \in B, z \in B(0,1) \tag{2.85}$$

$$\Rightarrow -f(z) \leqslant \frac{f(y) - r}{\varepsilon}, ||f|| \leqslant \frac{f(y) - r}{\varepsilon}, \forall z \in B(0,1), y \in B \tag{2.86}$$

$$\Rightarrow r \leqslant f(y) - \varepsilon ||f|| \Rightarrow r \leqslant \inf_{y \in B} f(y) - \varepsilon ||f|| < \inf_{y \in B} f(y), \tag{2.87}$$

同理可得 $\sup\limits_{x\in A} f(x) < r$，因此 H_f^r 严格分离 A, B.

推论 2.9 (Ascoli)

设 X 为实赋范空间，C 为闭凸集，$x_0 \notin C$，则存在闭超平面 H_f^r 严格分离 C, x_0.

推论 2.10

设 X 为实赋范空间，M 为其子空间，则 $\overline{M} \neq X$ 当且仅当存在非零的 $f \in X^*$ 使得 $f(M) = \{0\}$（或者说 $\overline{M} = X$ 当且仅当 $f \in X^*, f(M) = 0 \Rightarrow f = 0$）.

证明 若 $\overline{M} \neq X$，则存在 $x_0 \notin \overline{M}$，根据 Ascoli 定理，存在 $f \in X^*, r \in \mathbb{R}$ 使得 $\sup\limits_{x\in\overline{M}} f(x) < r < f(x_0)$，而 $\overline{M}$ 为向量空间说明 $f|_{\overline{M}} = 0$，因此 $f(M) = 0$ 但 $0 < r < f(x_0)$ 说明 $f \neq 0$.

推论 2.11 (Mazur)

设 X 为实赋范空间，C 为开凸集，F 为线性子流形（子空间的平移），$C \cap F = \emptyset$，则存在闭超平面 $H_f^r \supset F$ 且分离 C, F（$\sup\limits_{x\in C} f(x) \leqslant r$）.

证明 设 $F = M + x_0$，M 为子空间，则由凸集分离定理，存在 $f \in X^*, s \in \mathbb{R}$ 使得

$$\sup_{x\in C} f(x) \leqslant s \leqslant \inf_{y\in F} f(y) = \inf_{y\in M} f(y) + f(x_0) \Rightarrow \inf_{y\in M} f(y) \geqslant s - f(x_0) \Rightarrow f(M) = 0, \tag{2.88}$$

因此 $M \subset H_f^0, F \subset H_f^r$，其中 $r = f(x_0)$ 满足要求.

定义 2.15 (承托超平面)

称 $L = H_f^r$ 是凸集 C 在 x_0 处的承托超平面，若 C 完全落在 L 的一侧且 $x_0 \in L \cap \overline{C}$.

定理 2.22

设 X 为实赋范空间，C 为有内点的闭凸集，则对任意 $x_0 \in \partial C$，都有 C 在 x_0 处的承托超平面.

证明 令开凸集 $E = C^\circ$，$F = \{x_0\}$ 为零维线性子流形，则由 Mazur 定理，存在 $f \in X^*, r \in \mathbb{R}$ 使得 $\sup\limits_{x\in C} f(x) \leqslant r = f(x_0)$ 或 $\inf\limits_{x\in C} f(x) \geqslant r = f(x_0)$，因此 H_f^r 是 C 在 x_0 处的承托超平面.

2.5.3 一些应用

命题 2.14 (绝对收敛级数的重排定理)

设 X 为赋范空间，$\sum_{k=1}^\infty x_k$ 是 X 中绝对收敛级数，$\{y_k\}$ 为 $\{x_k\}$ 的重排，则 $\sum_{k=1}^\infty y_k = \sum_{k=1}^\infty x_k$.

证明 对任意 $f \in X^*$，$\left|\sum\limits_{k=1}^\infty f(x_k)\right| \leqslant ||f|| \sum\limits_{k=1}^\infty ||x_k|| < \infty$，即为绝对收敛的数项级数，因此重排不变：

$$\sum_{k=1}^\infty f(x_k) = \sum_{k=1}^\infty f(y_k) \Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^\infty y_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^\infty x_k\right), \tag{2.89}$$

根据 Hahn-Banach 定理可知 $\sum_{k=1}^\infty y_k = \sum_{k=1}^\infty x_k$（否则存在 $f \in X^*$ 在二者处取不同值）.

定义 2.16 (Frechet 可微)

设 X 为赋范空间，对于 $f : (a, b) \to X$ 和 $t_0 \in (a, b)$，若存在 $y \in X$ 使得

$$\lim_{h\to 0} \left\|\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - y\right\| = 0, \tag{2.90}$$

则称 f 在 t_0 处 Frechet 可微，$y := f'(t_0)$ 称为 f 在 t_0 处的 Frechet 导数.

定理 2.23 (拟微分中值定理)

设 $f : (a, b) \to X$ 上 Frechet 可微，则对任意 $t_1, t_2 \in (a, b)$，存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$||f(t_2) - f(t_1)|| \leqslant ||f'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)||\,|t_2 - t_1|. \tag{2.91}$$

证明 设 $F \in X^*$ 满足 $||F|| = 1, F(f(t_2) - f(t_1)) = ||f(t_2) - f(t_1)||$，令 $\varphi(\eta) = F(f(t_1 + \eta(t_2 - t_1)))$，则它在 $[0, 1]$ 连续，在 $(0, 1)$ 可微，并且

$$\varphi'(\eta) = F(f'(t_1 + \eta(t_2 - t_1))(t_2 - t_1)), \tag{2.92}$$

根据微分中值定理可得存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$||f(t_2) - f(t_1)|| = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) = F(f'(\theta(t_2 - t_1))(t_2 - t_1)) \leqslant ||f'(\theta t_1 + (1-\theta)t_2)||\,|t_2 - t_1|. \tag{2.93}$$

2.6 对偶空间 (共轭空间)

对于赋范空间 X，其上所有连续线性泛函的全体 X^* 称为 X 的**对偶空间**. 若 H 为 Hilbert 空间，则 Riesz 表示定理说明 $H^* = H$，因为存在对应

$$y \longleftrightarrow f_y, \tag{2.94}$$

其中 $f_y(x) = \langle x, y\rangle$，并且这是一个线性等距同构（进一步可由该同构定义出 H^* 中的内积）. 对于空间 $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$，其对偶空间有如下结论：

定理 2.24 (Riesz)

设 (X, Ω, μ) 为测度空间，$1 < p < \infty$，则 $(L^p)^* = L^q$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，并且当测度 μ 为 σ-有限时，$(L^1)^* = L^\infty$. 即

1. 对任意 $g \in L^q$，定义 $\Lambda_g(f) := \int fg$，则 $||\Lambda_g|| = ||g||_q$.
2. 对任意 $\Lambda \in (L^p)^*$，存在 $g \in L^q$ 使得 $\Lambda = \Lambda_g$.

或者说 $J : L^q \to (L^p)^*, g \mapsto \Lambda_g$ 是线性等距同构.

注 这里的 p, q 称为共轭指标，并且当 $p = 1$ 时 $q = \infty$.

证明 【Part 1 范数相等】

1. 若 $1 < p < \infty$，则对任意 $g \in L^q$，由 Holder 不等式可得
$$|\Lambda_g(f)| = \left|\int fg\right| \leqslant ||g||_q ||f||_p \Rightarrow ||\Lambda_g|| \leqslant ||g||_q. \tag{2.95}$$
令 $\tilde{f} = \mathrm{sgn}\,(g)|g|^{q-1}$，则 $||f||_p^p = ||g||_q^q < \infty, f \in L^p$，并且
$$\Lambda_g(\tilde{f}) = \left|\int \tilde{f}g\right| = \int |g|^q = ||g||_q^q \Rightarrow ||\Lambda_g|| \geqslant \frac{|\Lambda_g(\tilde{f})|}{||f||_p} = ||g||_q, \tag{2.96}$$
因此 $||\Lambda_g|| = ||g||_q$.
2. 若 $p = 1$，则对任意 $g \in L^\infty$ 有
$$|\Lambda_g(f)| = \left|\int fg\right| \leqslant ||g||_\infty ||f||_1 \Rightarrow ||\Lambda_g|| \leqslant ||g||_\infty. \tag{2.97}$$
根据本性上确界定义，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 取 $A_n \subset \{|g| > ||g||_\infty - \frac{1}{n}\}$ 使得 $\mu(A_n) \in (0, \infty)$，令 $f_n = \frac{1}{\mu(A)}\mathrm{sgn}\,(g)\chi_{A_n}$ 则 $||f_n||_1 = 1$ 且
$$||\Lambda_g|| \geqslant |\Lambda_g(f_n)| = \frac{1}{\mu(A)}\int_{A_n} |g| d\mu \geqslant ||g||_\infty - \frac{1}{n}, \tag{2.98}$$

由 n 的任意性即得.

【Part 2 存在性】只考虑 $\Omega=[0,1],\mu=m$，对任意 $\Lambda\in(L^p)^*$，构造 $g\in L^q$ 使得 $\Lambda=\Lambda_g$.

STEP 1. 令 $G(t)=\Lambda(\chi_{[0,t]}),t\in[0,1]$，断言 G 绝对连续，则存在 $g\in L^1$ 使得

$$G(t)=\int_0^t g(s)ds\Rightarrow\Lambda(\chi_{[0,t]})=\int\chi_{[0,t]}g. \tag{2.99}$$

对任意 $\varepsilon>0$，令 $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{||\Lambda||}\right)^p$，对任意无交区间 $(a_k,b_k)\subset[0,1],1\leqslant k\leqslant N,\sum_{i=1}^N|b_k-a_k|<\delta$，有

$$\sum_{i=1}^N|G(b_i)-G(a_i)|=\sum_{i=1}^N|\Lambda(\chi_{(a_i,b_i)})|\leqslant||\Lambda||\sum_{i=1}^N||\chi_{(a_i,b_i)}||_p. \tag{2.100}$$

令 $f=\sum_{k=1}^N\operatorname{sgn}(G(b_k)-G(a_k))\chi_{[a_k,b_k]}$，则 $||f||_p^p\leqslant\sum_{k=1}^N(b_k-a_k)<\varepsilon$ 并且

$$\sum_{k=1}^N|G(b_k)-G(a_k)|=\Lambda(f)\leqslant||\Lambda||\,||f||_p\leqslant||\Lambda||\delta^{\frac{1}{p}}=\varepsilon. \tag{2.101}$$

因此

$$\sum_{k=1}^N|G(b_k)-G(a_k)|\leqslant||\Lambda||\,||f||_p\leqslant||\Lambda||\delta^{\frac{1}{p}}=\varepsilon. \tag{2.102}$$

说明 $G\in AC[0,1]$.

因此存在 g，对任意阶梯函数 f 都有 $\Lambda(f)=\int fg$.

STEP 2. 证明上面的 $g\in L^q$（使用后面的引理）.

对任意 $f\in L^\infty[0,1]$，设 $M=||f||_\infty+1$，则存在阶梯函数 $\{\varphi_n\}$ 使得 $\varphi_n\overset{a.e.}{\to}f,||\varphi||_\infty\leqslant M$. 因此 $|f-\varphi_n|^p\leqslant(2M)^p$，由 DCT 可得

$$|\Lambda(f)-\Lambda(\varphi_n)|\leqslant||\Lambda||\,||f-\varphi_n||_p\to0\Rightarrow\Lambda(f)=\lim_{n\to\infty}\Lambda(\varphi_n), \tag{2.103}$$

由于 $|\varphi_ng|\leqslant M|g|$，再用 DCT 可得

$$\int fg=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_ng=\lim_{n\to\infty}\Lambda(\varphi_n)=\Lambda(f)\Rightarrow||fg||_1\leqslant||\Lambda||\,||f||_p, \tag{2.104}$$

根据引理有 $g\in L^q$，得证.

Step 3. 证明对任意 $f\in L^p$ 都有 $\Lambda(f)=\int fg$.

对任意 $f\in L^p,\varepsilon>0$，存在阶梯函数 φ 使得 $||f-\varphi||_p\leqslant\frac{\varepsilon}{2(||\Lambda||+||g||_q)}$, 因此

$$\left|\Lambda(f)-\int fg\right|\leqslant|\Lambda(f)-\Lambda(\varphi)|+\left|\Lambda(\varphi)-\int\varphi g\right|+\left|\int\varphi g-\int fg\right| \tag{2.105}$$

$$\leqslant||\Lambda||\,||f-\varphi||_p+||g||_q||f-\varphi||_p \tag{2.106}$$

$$\leqslant\varepsilon. \tag{2.107}$$

引理 2.4

设 $g\in L^1$，若存在 $C>0$ 使得 $||fg||_1\leqslant C||f||_p,\forall f\in L^\infty$，则 $g\in L^q$ 且 $||g||_q\leqslant C$.

证明

1. 若 $1<p<\infty$，令 $g_n=g\chi_{\{|g|\leqslant n\}},f_n=\operatorname{sgn}(g)|g|^{q-1}$，则 $f_n\in L^\infty,||f_n||_p^p=||g_n||_q^q$，并且 $f_ng=f_ng_n=|g_n|^q$，积分可得

$$||g_n||_q^q=\left|\int f_ng\right|\leqslant C||f_n||_p=C||g_n||_q^{\frac{q}{p}}\Rightarrow||g_n||_q\leqslant C, \tag{2.108}$$

由 Fatou 引理

$$\int|g|^q\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int|g_n|^q\leqslant C^q\Rightarrow||g||_q\leqslant C. \tag{2.109}$$

2. 若 $p=\infty$，令

定理 2.25

$L^1 \subsetneq (L^\infty)^*$.

证明 首先对任意 $g \in L^1$ 有 $|\Lambda_g(f)| \leqslant ||g||_1 ||f||_\infty$，因此 $\Lambda_g \in (L^\infty)^*$.

下证对于某个 $\Lambda \in (L^\infty)^*$，不存在 $g \in L^1$ 使得 $\Lambda = \Lambda_g$. 考虑闭子空间 $C[0,1] \subsetneq L^\infty$，取 $f_0 \in L^\infty \backslash C[0,1]$，则 $d(f_0, C[0,1]) > 0$，由 Hahn-Banach 定理，存在 $\Lambda \in (L^\infty)^*, ||\Lambda|| = 1$ 使得 $\Lambda(C[0,1]) = \{0\}$ 且 $\Lambda(f_0) = d$.

假设命题不成立，则存在 $g \in L^1$ 使得 $\Lambda(f) = \int fg$，因此对任意 $f \in C[0,1]$ 有 $\int fg = 0$. 取一列连续函数 $\{f_n\}$ 使得 $||f_n - \mathrm{sgn}\,(g)||_1 \to 0$，则 $\{f_n\}$ 有几乎处处收敛子列 f_{n_k}，由 DCT 可得

$$\int |g| = \lim_{n\to\infty} \int f_{n_k} g = 0, \tag{2.110}$$

因此 $g = 0, a.e.$，$\Lambda = 0, a.e.$，与 $\Lambda(f_0) = d$ 矛盾.

¶ 连续函数空间的对偶

定义 2.17 (有界变差函数空间)

设 $BV[a,b] = \{f : \bigvee_a^b(f) < \infty\}$，其中可定义范数 $||f||_{BV} = |f(a)| + \bigvee_a^b(f)$.

命题 2.15

$(BV[a,b], ||\cdot||_{BV})$ 是 Banach 空间.

证明 注意到 $\bigvee_a^b(f+g) \leqslant \bigvee_a^v(f) + \bigvee_a^b(g)$，只需证明 $BV[a,b]$ 中的绝对收敛级数收敛即可.

定义 $BV[a,b]$ 的子空间 $BV_0[a,b]$ 为 (a,b) 上的右连续函数，且满足 $f(a) = 0$，则 $BV_0[a,b]$ 是 $BV[a,b]$ 的闭子空间.

定义 2.18 (Riemann-Stieltjes 积分)

设 f, g 为 $[a,b]$ 上的函数，对分割 $\pi : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ 以及 $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$，定义

$$\sigma(\pi, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(t_k) - g(t_{k-1})], \tag{2.111}$$

若存在 $I \in \mathbb{R}$ 使得 $|\sigma(\pi,\xi) - I| \to 0(||\pi|| \to 0)$，则称 f 关于 g 是 Riemann-Stieltjes 可积的，记 $I = \int_a^b f dg$ 为 f 关于 g 的 Riemann-Stieltjes 积分.

定理 2.26 (Riesz)

$C[a,b]^* = BV_0[a,b]$，即

1. 对任意 $g \in BV_0[a,b]$，$\Lambda_g(f) := \int_a^b f dg, \forall f \in C[a,b]$，则 $\Lambda_g \in C[a,b]^*$ 且 $||\Lambda_g|| = ||g||_{BV}$.
2. 对任意 $\Lambda \in C[a,b]^*$，存在唯一 $g \in BV_0[a,b]$ 使得 $\Lambda = \Lambda_g$.

注 对于一般的紧度量空间（或者说 LCH 空间），有 $C(K)^* = \mathcal{M}(K) = \{$复 Baire 测度$\}$，对应为 $\Lambda_\mu(f) = \int f d\mu$.

2.6.1 自反空间

定义 2.19 (二次对偶空间)

对于赋范空间 X，X^* 是 Banach 空间，定义 $X^{**} := (X^*)^* = \mathcal{L}(X^*, \mathbb{F})$ 为 X 的二次对偶空间（或第二共轭空间）.

对任意 $x \in X$，可自然诱导线性泛函 x^{**}，使得对任意 $f \in X^*$ 有 $x^{**}(f) = f(x)$，并且一方面

$$|x^{**}(f)| = |f(x)| \leqslant ||x||\,||f|| \Rightarrow ||x^{**}|| \leqslant ||x||, \tag{2.112}$$

另一方面由 Hahn-Banach 定理，存在 $f_0 \in X^*, ||f_0|| = 1$ 使得 $x^{**}(f_0) = f_0(x) = ||x||$，因此 $x^{**} \in X^{**}, ||x^{**}|| = ||x||$. 这说明 X 可以等距嵌入到 X^{**} 中，称嵌入 ι 为**自然映射**（或典则嵌入）.

定义 2.20 (自反)

若自然映射 ι 是满射，则称 X 自反，记 $X^{**} = X$. ♣

注 这里的等号要求等距同构必然是 ι，另外存在 Banach 空间 X 使得 X 与 X^{**} 等距同构但 X 不自反.

例 2.8

- 自反空间必然完备.
- 有限维赋范空间都是自反的.
- Hilbert 空间是自反的.

定理 2.27

当 $p > 1$ 时，L^p 是自反的. ♡

证明 只需证明对任意 $\Lambda \in (L^p)^{**}$，存在 $u \in L^p$ 使得 $\Lambda(f) = f(u), \forall f \in (L^p)^*$. 设 $J : L^q \to (L^p)^*, J(v) = f_v, J^{-1}(f) = v_f$，则 $\Lambda \circ J \in (L^q)^*$，因此存在唯一 $u \in L^p$ 使得 $(\Lambda \circ J)(v) = \int uv, \forall v \in L^q$，由此可得

$$\Lambda(f) = \Lambda(J(v_f)) = \int uv_f = f(u). \tag{2.113}$$

定理 2.28

$C[a,b]$ 不自反. ♡

证明 若不然，则对任意 $\Lambda \in C[a,b]^{**}$，存在 $u \in C[a,b]$ 使得 $\Lambda(f) = f(u), \forall f \in C[a,b]^*$，但由于 $C[a,b]^* = BV_0[a,b]$，因此对任意 $f \in C[a,b]^*$，存在唯一 $v_f \in BV_0[a,b]$ 使得 $f(u) = \int_a^b u dv_f$ 且 $||v_f||_{BV} = ||f||$.

令 $c = \frac{a+b}{2}$，考虑 $F_c \in C[a,b]^{**}$ 使得（$|F_c(f)| \leqslant \bigvee_a^b(v_f) = ||v_f||_{BV} = ||f|| \Rightarrow F_c \in C[a,b]^{**}$）

$$F_c(f) = v_f(c+0) - v_f(c-0), \tag{2.114}$$

根据假设，存在 $u_c \in C[a,b]$ 使得 $F_c(f) = f(u_c) = \int_a^b u_c dv_f$，令 $v(t) = \int_a^t u_c(s)ds, v \in BV_0[a,b]$，再令 $f_v = J(v) \in C[a,b]^*$，则 v_f 在 c 处连续说明

$$0 = F_c(f_v) = \int_a^b u_c dv = \int_a^b u_c^2 dt \Rightarrow u_c = 0, F_c = 0, \tag{2.115}$$

矛盾（很容易找到在 c 处不连续的函数 g 使得 $F_c(g) \neq 0$）.

定理 2.29 (Banach)

若 X^* 可分，则 X 可分. ♡

注 反之不成立，L^1 可分但 L^∞ 不可分.

证明 【STEP 1. 证明 X^* 中单位球面 S_1^* 可分】

设 $\{f_n\}$ 为 X^* 中的可数稠密子集（不妨设 $f_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$），令 $g_n = \frac{f_n}{||f_n||}$，则对任意 $g \in S_1^*$，存在 $f_{n_k} \to g$，而

$$||g - g_{n_k}|| \leqslant ||g - f_{n_k}|| + ||f_{n_k} - g_{n_k}|| = ||g - f_{n_k}|| + \big|||f_{n_k}|| - 1\big| \to 0, \tag{2.116}$$

因此 $\{g_n\}$ 为 S_1^* 中的可数稠密子集.

【STEP 2. 证明存在 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, ||x_n|| = 1$ 使得 $\overline{\mathrm{Span}(x_n : n \in \mathbb{N})} = X$】

由于 $||g_n|| = 1$，因此存在 $x_n \in X, ||x_n|| = 1$ 使得 $g_n(x_n) > \frac{1}{2}$，令 $M = \mathrm{Span}(x_n : n \in \mathbb{N})$，下证 $\overline{M} = X$.

若不然，则存在 $x_0 \in X\backslash\overline{M}$，因此存在 $f \in X^*, ||f|| = 1$ 使得 $f(\overline{M}) = 0, f(x_0) = d(x_0, M) > 0$. 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有

$$||g_n - f|| \geqslant |g_n(x_n) - f_n(x_n)| = |g_n(x_n)| > \frac{1}{2}, \tag{2.117}$$

与 $\{g_n\}$ 的稠密性矛盾.

【STEP 3. 证明 $\mathrm{Span}^{\mathbb{Q}}(x_n : n \in \mathbb{N})$ 是 X 的稠密子集（可数性显然）】

显然 $\mathrm{Span}^{\mathbb{Q}}(x_n : n \in \mathbb{N})$ 在 $\mathrm{Span}(x_n : n \in \mathbb{N})$ 中稠密，而后者在 X 中稠密，得证.

定理 2.30

当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，$L^p[0,1]$ 可分.

证明 直接构造其可数稠密子集：

$$\left\{\sum_{k=0}^{2^n-1} r_k \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})} : r_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\right\}, \tag{2.118}$$

显然它们可以逼近任意阶梯函数，仿照 L^1 中阶梯函数稠密性可知 L^p 中阶梯函数可以逼近可积简单函数，对任意 $f \in L^p$，首先存在简单函数列 $\varphi_n \xrightarrow{a.e.} f, |\varphi_n| \leqslant |f|$，因此 $||\varphi_n||_p \leqslant ||f||_p < \infty$ 说明 $\varphi \in L^p$，并且由 DCT 可得

$$|\varphi_n - f|^p \leqslant |2f|^p \Rightarrow \int |\varphi_n - f|^p \to 0, \tag{2.119}$$

因此可积简单函数在 L^p 中稠密，故上面的集合是 L^p 的稠密子集.

定理 2.31

$L^\infty = L^\infty[0,1]$ 不可分.

证明 若 L^∞ 有可数稠密子集 $\{f_n\}$，则对任意 $\chi_{[0,t]}$，存在 $f_{n_t} \in B(\chi_{[0,t]}, \frac{1}{3})$，而当 $t \neq s$ 时 $d(\chi_{[0,t]}, \chi_{[0,s]}) = 1$，因此 $B(\chi_{[0,t]}, \frac{1}{3})$ 互不相交，故 $(0,1) \to \mathbb{N}, t \mapsto n_t$ 是单射，与可数性矛盾.

推论 2.12

L^1 不是自反的.

证明 若 L^1 自反，则 $L^1 = (L^1)^{**} = (L^\infty)^*$ 可分，因此 L^∞ 可分，矛盾.

2.6.2 共轭算子

引理 2.5

设 X, Y 为赋范空间，则对任意 $T \in \mathcal{L}(X, Y)$，存在 $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$，使得对任意 $f \in Y^*$ 有 $(T^*f)(x) = (f \circ T)(x)$，并且共轭算子 $* : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}(Y^*, X^*), T \mapsto T^*$ 是一个线性等距嵌入.

证明 对任意 $f \in Y^*$，定义线性算子 $\Lambda_f = f \circ T : X \to \mathbb{F}$，则 $||\Lambda_f|| \leqslant ||f||\,||T||$，再定义线性映射 $T^* : Y^* \to X^*, f \mapsto \Lambda_f$，则

$$||T^*f|| = ||\Lambda_f|| \leqslant ||T||\,||f|| \Rightarrow ||T^*|| \leqslant ||T||. \tag{2.120}$$

对任意 $x \in X$（不妨设 $Tx \neq 0$），由 Hahn-Banach 定理，存在 $f \in Y^*, ||f|| = 1$ 使得 $f(Tx) = ||Tx||$，因此

$$||Tx|| = |f(Tx)| = ||(T^*f)(x)|| \leqslant ||T^*f||\,||x|| \Rightarrow ||T|| \leqslant ||T^*f|| \leqslant ||T^*||. \tag{2.121}$$

故 $||T|| = ||T^*||$，因此 $*$ 是线性等距.

定理 2.32 (Pettis)

自反空间的闭子空间自反.

证明 设 X 自反，Y 为其闭子空间，只需证明对任意 $\Lambda \in Y^{**}$，存在 $y \in Y$ 使得 $\Lambda(f) = f(y), \forall f \in Y^*$. 定义限制算子 $T: X^* \to Y^*, f \mapsto f|_Y$，则 $T^* \in \mathcal{L}(Y^{**}, X^{**})$，设 $T^*(\Lambda) = y^{**} \in X^{**} = X$，断言 $y \in Y$，若不然则存在（因为 Y 闭）$\tilde{f} \in X^*, \tilde{f}(Y) = 0, \tilde{f}(y) = d(y, Y) > 0$，而 $\tilde{f}(Y) = 0$ 说明 $T(\tilde{f}) = f|_Y = 0$，因此

$$0 = \Lambda(T(\tilde{f})) = (T^*\Lambda)(\tilde{f}) = y^{**}(\tilde{f}) = \tilde{f}(y) > 0, \tag{2.122}$$

矛盾. 因此对任意 $f \in Y^*$，设 F 为其到 X^* 上的保范延拓则有

$$\Lambda(f) = \Lambda(T(F)) = y^{**}(F) = F(y) = f(y), \tag{2.123}$$

得证.

注 证明过程实际上是将 Λ 通过限制算子拉回到 X^{**} 中讨论.

2.7 弱收敛与弱 * 收敛

¶ 弱收敛与弱 * 收敛

定义 2.21 (弱收敛)

设 X 为赋范空间，称 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ 弱收敛到 $x_0 \in X$，若对任意 $f \in X^*$ 有 $f(x_n) \to f(x_0)$，记为 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，x_0 称为 $\{x_n\}$ 的弱极限. ♣

注 与之对照，强收敛即为一般的依范数收敛，并且显然强收敛更强.

例 2.9 强收敛强于弱收敛 设 $X = L^2(S^1), e_k(t) = e^{-2\pi ikt}, ||e_k|| = 1$，对任意 $f \in X^*$，存在 $v \in L^2(S^1)$ 使得 $f(u) = \int uv$，由 Riemann-Lebesgue 引理有

$$f(e_n) = \hat{v}(n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

即 $e_n \xrightarrow{w} 0$，但显然 $e_n \not\to 0$.

定理 2.33 (有限维空间中的强弱收敛等价)

若 X 是有限维赋范空间，则其中的弱收敛与强收敛等价. ♡

证明 设 $\{e_1, \cdots, e_m\}$ 是 X 的一组基，$\{e^1, \cdots, e^m\}$ 是它的对偶基，则 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 当且仅当每个 $e^k(x_n) \to e^k(x_0)$，因此

$$x_n = \sum_{i=1}^m e^i(x_n) e_i \to \sum_{i=1}^m e^i(x_0) e_i = x_0,$$

定理 2.34 (Mazur)

若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，则 $x_0 \in \overline{\mathrm{conv}(x_n : n \in \infty)}$. ♡

证明 令 $C = x_0 \in \overline{\mathrm{conv}(x_n : n \in \infty)}$，若 $x_0 \notin C$，则由 Ascoli 定理，存在 $f \in X^*, \alpha \in \mathbb{R}$ 使得

$$\sup_{x \in C} f(x) < \alpha < f(x_0) \Rightarrow f(x_n) < \alpha < f(x_0), \forall n \in \mathbb{N},$$

因此 $f(x_n) \not\to f(x_0)$，矛盾.

在对偶空间中，有与弱收敛很像的另一种收敛.

定义 2.22 (弱 * 收敛)

若对任意 $x \in X$ 有 $f_n(x) \to f(x)$，则称 $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X^*$ 弱 * 收敛到 $f \in X^*$，记为 $f_n \xrightarrow{w^*} f$. ♣

命题 2.16 (三种收敛性的关系)

在 X^* 中，强收敛 $\Rightarrow$ 弱收敛 $\Rightarrow$ 弱 * 收敛.

证明 若 $f_n \xrightarrow{w} f$，则对任意 $\Lambda \in X^{**}$ 有 $\Lambda(f_n) \to \Lambda(f)$，特别对任意 $x \in X$ 有

$$f_n(x) = x^{**}(f_n) \to x^{**}(f) = f(x) \Rightarrow f_n \xrightarrow{w^*} f.$$

借助相同的过程可得

命题 2.17 (自反空间中的收敛等价性)

若 X 自反，则 X^* 中弱收敛与弱 * 收敛等价.

定理 2.35 (弱收敛的等价刻画)

$x_n \xrightarrow{w} x_0$ 当且仅当 $\sup_n ||x_n|| < \infty$，并且存在 X^* 的稠密子空间 $\mathcal{F}$ 使得 $f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in \mathcal{F}$.

注 这一表述与 Banach-Steinhaus 定理类似.

证明 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 当且仅当对任意 $f \in X^*$ 有 $f(x_n) \to f(x)$，也即 $x_n^{**}(f) \to x_0^{**}(f)$，由于 X^* 完备，因此由 Banach-Steinhaus 定理，这当且仅当 $\sup_n ||x_n|| = \sup_n ||x_n^{**}|| < \infty$ 且存在稠密子空间 $\mathcal{F} \subset X^*$ 使得 $x_n^{**}(f) \to x_0^{**}(f), \forall f \in \mathcal{F}$，即 $f(x_n) \to f(x_0), \forall f \in \mathcal{F}$.

¶ 弱列紧与弱 * 列紧

定义 2.23 (弱列紧 & 弱 * 列紧)

- 称 $M \subset X$ 弱列紧，若 M 中任意序列都有弱收敛子列.
- 称 $\mathcal{F} \subset X^*$ 弱 * 列紧，若 $\mathcal{F}$ 中任意序列都有弱 * 收敛子列.

虽然一般空间中的单位闭球非紧，但可以证明其对偶空间中的单位闭球是弱 * 紧的.

定理 2.36 (Alaoglu)

设 X 为赋范空间，则 X^* 中单位闭球是弱 * 紧的.

注 证明见附录.

定理 2.37 (可分 Banach-Alaoglu 定理)

若 X 可分，则 X^* 中的有界集是弱 * 列紧的.

证明 设 $\{x_n\} \subset X$ 为可数稠密子集，$\{f_n\} \subset X^*$ 有界，记 $C = \sup_n ||f_n|| < \infty$，则对任意 m，$\{f_n(x_m) : n \in \mathbb{N}\}$ 为有界数列，依次有收敛子列 $\{f_{n_{mj}}(x_m) : j \in \mathbb{N}\}, \forall m \in \mathbb{N}$（先取子列，再取子列的子列，以此类推），抽对角线 $\{f_{n_{mm}}(x_m) : m \in \mathbb{N}\}$，断言 $\exists f \in X^*, f_{n_{mm}} \xrightarrow{w} f$，重新编号 $f_{n_m} := f_{n_{mm}}$.

对任意 $x \in X$，存在 x_m 使得 $||x - x_m|| < \varepsilon/3C$，当 k 充分大时任意 $f_{n_{k+p}}(x_m) \to f_{n_{k+p}}(x)$，因此

$$\begin{aligned}|f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_k}(x)| &\leqslant |f_{n_{k+p}}(x) - f_{n_{k+p}}(x_m)| + |f_{n_{k+p}}(x_m) - f_{n_k}(x_m)| + |f_{n_k}(x_m) - f_{n_k}(x)| \\ &\leqslant C||x - x_m|| + \frac{\varepsilon}{3} + C||x - x_m|| \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

因此 $\{f_{n_k}(x)\}$ 为 Cauchy 列，记 f 为其逐点极限，则 $f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f$，并且

$$|f(x)| \leqslant \sup_n |f_n(x)| \leqslant C||x|| \Rightarrow f \in X^*,$$

得证.

引理 2.6 (弱收敛极限的上界)

设赋范空间 X 中 $x_n \stackrel{w}{\to} x_0$，则

$$||x_0|| \leqslant \liminf_{n\to\infty} ||x_n||.$$

♡

证明 $x_n \stackrel{w}{\to} x_0$ 说明对任意 $f \in X^*$ 有 $f(x_n) \to f(x_0)$. 由于 $||x|| = \sup_{||f||=1} |f(x)|$，因此对任意 ε，存在 $f \in X^*, ||f|| = 1$ 使得 $||x_0|| \leqslant |f(x_0)| + \varepsilon$，并且当 n 充分大时有

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x_0)| \leqslant |f(x_n)| + \varepsilon,$$

因此 $||x_0|| \leqslant |f(x_0)| + \varepsilon \leqslant |f(x_n)| + 2\varepsilon \leqslant ||x_n|| + 2\varepsilon$，取下极限可得

$$||x_0|| \leqslant \liminf_{n\to\infty} ||x_n|| + \varepsilon \Rightarrow ||x_0|| \leqslant \liminf_{n\to\infty} ||x_n||.$$

定理 2.38 (Eberlein-Smulian)

若 X 为自反空间，则

1. X 中有界集是弱列紧的.
2. X 中单位闭球是弱自列紧的.

♡

证明

1. 只需证明对任意 $R > 0$，$\overline{B(0,R)}$ 是弱列紧的. 设 $\{x_n\} \subset X, ||x_n|| \leqslant R$，记 $Y = \overline{\mathrm{Span}(x_n : x \in \mathbb{N})}$，则 Y 可分，并且 X 的自反性蕴含了闭子空间 Y 的自反性（Petti），进而 $\Rightarrow Y^{**} = Y$ 可分 $\Rightarrow Y^*$ 可分，由可分 Banach-Alaoglu 定理，Y^{**} 中的有界集是弱 * 列紧的，$||x_n^{**}|| = ||x_n|| \leqslant R$ 说明 $\{x_n^{**}\}$ 有弱 * 收敛子列 $x_{n_k}^{**} \stackrel{w^*}{\to} x_0^{**} \in Y^{**}$，即对任意 $f \in Y^*$ 有

$$f(x_n) = x_n^{**}(f) \to x_0^{**}(f) = f(x_0),$$

对任意 $F \in X^*$，$F(x_{n_k}) = F|_Y(x_{n_k}) \to F|_Y(x_0) = F(x_0)$，因此 $x_{n_k} \stackrel{w}{\to} x_0$，得证.
2. 设 x_0 为其某个子列的收敛极限，则

$$||x_0|| \leqslant \liminf_{k\to\infty} ||x_{n_k}|| \leqslant 1 \Rightarrow x_0 \in B(0,1).$$

2.8 谱理论

设 X 为（复）Banach 空间，本节将讨论闭算子 $A : D(A) \subset X \to X$ 的谱，首先给出定义：

定义 2.24 (谱集 & 预解集)

对任意闭线性算子 $A : D(A) \subset X \to X$，定义其预解集为（其中元素称为 A 的正则值）

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\},$$

其补集 $\sigma(A) := \mathbb{C}\backslash\rho(A)$ 称为 A 的谱集（其中元素称为）

♣

若 $\dim X < \infty$，则（不妨设 A 定义在 X 上）$\sigma(A)$ 恰好对应其特征值的全体，因为此时单性与满性等价，且任何线性变换都可逆. 但当 $\dim X = \infty$ 时情况会复杂很多，首先考虑引理：

引理 2.7

设 X 为 Banach 空间，$A : D(A) \subset X \to X$ 为闭算子，若 $\lambda I - A : D(A) \to X$ 为双射，则 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. ♡

证明 首先易证闭算子与有界线性算子的和还是闭算子，进一步若

$$\begin{cases} y_n \to y, \\ (\lambda I - A)^{-1} y_n := x_n \to x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n \to x, \\ (\lambda I - A) x_n = y_n \to y \end{cases}$$

则根据 $\lambda I - A$ 的闭性可得 $x = (\lambda I - A)^{-1} y$，故 $(\lambda I - A)^{-1}$ 为闭算子，由闭图像定理可知 $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

由此可知，$\sigma(A)$ 中的元素可以分为三类：

- 特征值 $\sigma_p(A)$：$\mathrm{Ker}\,(\lambda I - A) \neq 0$（即 $\lambda I - A$ 不是单射）.
- 连续谱 $\sigma_c(A)$：$\mathrm{Ker}\,(\lambda I - A) = 0, \mathrm{Ran}(\lambda I - A) \neq X, \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} = X$（即像集不满，但稠密）.
- 剩余谱 $\sigma_r(A)$：$\mathrm{Ker}\,(\lambda I - A) = 0, \overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - A)} \neq X$（即像集不稠密）.

综上，有复平面的划分（无交并）$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$，后面会看到一些例子，说明这三种情形都是有可能出现的.

下面讨论闭算子的谱.

引理 2.8

设 $T \in \mathcal{L}(X), ||T|| < 1$，则 $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ 且有显式表达（von Neumann 级数）以及范数的控制：

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n, \quad ||(I - T)^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1 - ||T||}$$

♡

注 对于一般的 Banach 代数也有类似结论.

证明 令 $S_n = \sum_{k=0}^{n} T^n$，仿照几何级数的讨论可知 $\{S_n\}$ 为 Cauchy 列，故极限 $S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X)$. 另一方面 $(I - T)S_n = I - T^{n+1} \to I$，因此 $(I - T)^{-1} = S = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$，最后的估计是容易的.

定理 2.39 (预解集的开性与谱集的紧性)

设 $A : D(A) \subset X \to X$ 为闭算子，则

(1) $\rho(A) \subset \mathbb{C}$ 为开集.

(2) $\sigma(A) \subset \overline{B(0, ||A||)}$，特别地，$\sigma(A)$ 为紧集.

♡

证明 (1) 设 $\lambda_0 \in \rho(A)$，则对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$，只要 $|\lambda - \lambda_0| < ||(\lambda_0 I - A)^{-1}||^{-1}$ 就有

$$\lambda I - A = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}],$$

即 $\lambda I - A$ 可逆.

(2) 对任意 $|\lambda| > ||A||$ 有 $||A/\lambda|| < 1$，故 $\lambda I - A = \lambda(I - A/\lambda)$ 可逆，即得 $\sigma(A) \subset \overline{B}(0, ||A||)$. 由此可得 $\sigma(A)$ 为有界闭集，从而为紧集.

¶ 算子的谱半径

定义 2.25 (预解式)

设 $A : D(A) \subset X \to X$ 为闭算子，定义其预解式为算子值函数

$$R_\lambda(A) : \rho(A) \to \mathcal{L}(X), \quad \lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}.$$

♣

定义 2.26 (算子值函数的全纯)

设 X 为 Banach 空间，$\Omega \subset \mathbb{C}$ 为区域，称 $T : \Omega \to \mathcal{L}(X)$ 在 $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ 处全纯，若存在 $S_{\lambda_0} \in \mathcal{L}(X)$ 使得

$$\lim_{z \to 0} \left\| \frac{T_{\lambda_0 + z} - T_{\lambda_0}}{z} - S_{\lambda_0} \right\| = 0. \tag{2.124}$$

♣

引理 2.9 (第一预解公式)

设 $\lambda, \mu \in \rho(A)$，则 $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$.

证明 $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}[(\lambda I - A) + (\mu - \lambda)I](\mu I - A)^{-1} = R_\mu(A) + (\mu - \lambda)R_\lambda(A)R_\mu(A)$.

定理 2.40 (预解式的全纯性)

预解式 $\lambda \mapsto R_\lambda(A)$ 在 $\rho(A)$ 上全纯.

注 事实上，后面的证明只需要其“弱解析性”（复合任意 $f \in (\mathcal{L}(X))^*$ 后全纯）即可.

证明 首先证明连续性，设 $\lambda_0 \in \rho(A)$，当 $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{2}||R_{\lambda_0}(A)||^{-1}$ 时就有 $\lambda \in \rho(A)$ 以及

$$\lambda I - A = (\lambda_0 I - A)[I + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 I - A)^{-1}],$$

从而 $[I + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ 且有 $R_\lambda(A) = [I + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1}R_{\lambda_0}(A)$，由此可给出估计

$$||[I + (\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)]^{-1}|| \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow ||R_\lambda(A)|| \leqslant 2||R_{\lambda_0}(A)||,$$

再借助第一预解公式可得

$$||R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)|| = |\lambda - \lambda_0| \cdot ||R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A)|| \leqslant 2||R_{\lambda_0}(A)||^2|\lambda - \lambda_0|,$$

即 $R_\lambda(A)$ 是 Lipschitz 连续的.

全纯性同理（注意到 $\mathcal{L}(X)$ 中乘法连续）：

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)}{\lambda - \lambda_0} = -\lim_{\lambda \to \lambda_0} R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A) = -R_{\lambda_0}(A)^2.$$

由此可证，有限线性算子的谱集必定非空.

定理 2.41 (Gelfand 谱不空定理)

设 X 为 Banach 空间，若 $0 \neq A \in \mathcal{L}(X)$，则 $\sigma(A) \neq \emptyset$.

证明 若 $\sigma(A) = \emptyset$ 则 $\rho(A) = \mathbb{C}$，此时 $R_\lambda(A)$ 为算子值整函数，对任意 $f \in (\mathcal{L}(X))^*$，考虑整函数

$$u_f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad \lambda \mapsto f(R_\lambda(A)),$$

注意到当 $|\lambda| > 2||A||$ 时有

$$||R_\lambda(A)|| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - ||\frac{A}{\lambda}||} < \frac{1}{||A||} \Rightarrow |u_f(\lambda)| \leqslant ||f||\,||R_\lambda(A)|| < \frac{||f||}{||A||},$$

从而 u_f 为有界整函数，由 Liouville 定理可知 u_f 恒为常数，即对任意 $\mu, \lambda \in \mathbb{C}, f \in (\mathcal{L}(X))^*$ 有 $f(R_\lambda(A)) = f(R_\mu(A))$，由 Hahn-Banach 定理可得 $R_\lambda(A) = R_\mu(A)$（否则可以被某个有界线性泛函分离），即 $0 = R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$，这显然不可能.

定义 2.27 (有界线性算子的谱半径)

对于 $A \in \mathcal{L}(X)$，称 $r_\sigma(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ 为 A 的谱半径.

注 σ 的紧性 + 非空保证了 $r_\sigma(A) < ||A|| < \infty$，即谱半径是良定的.

进一步可给出谱半径的精确表达：

定理 2.42 (Gelfand 谱半径公式)

设 X 为 Banach 空间 $A \in \mathcal{L}(X)$，则 $r_\sigma(A) = \lim_{n \to \infty} ||A^n||^{\frac{1}{n}}$.

证明 【Step 1. 证明极限存在且等于 $\inf_n ||A^n||^{\frac{1}{n}}$】

令 $r=\inf_n ||A^n||^{\frac{1}{n}}$，则有

$$\inf_{n\geqslant k}||A^n||^{\frac{1}{n}}\geqslant \inf_n ||A^n||^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \liminf_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}\geqslant r,$$

由下确界的定义可知对任意 $\varepsilon>0$，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $||A^m||^{\frac{1}{m}}<r+\varepsilon$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$，作带余除法 $n=p_nm+q_n$，则有

$$\begin{aligned}
||A^n||^{\frac{1}{n}}&\leqslant ||A^m||^{\frac{p_n}{n}}||A||^{\frac{q_n}{n}}\leqslant (r+\varepsilon)^{\frac{p_nm}{n}}||A||^{\frac{q_n}{n}}\\
&\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}\leqslant r+\varepsilon\leqslant \liminf_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}+\varepsilon,
\end{aligned}$$

根据 ε 任意性可知 $\lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 存在且等于 r.

【Step 2. 证明 $r_\sigma(A)\leqslant \lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$】

考虑如下级数，由 Cauchy-Hadamard 公式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}||A^n||z^n\Rightarrow R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}},$$

因此当 $|z|>\lim_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 时该级数绝对收敛，并且被它控制的算子项级数 $\sum z^nA^n$ 也收敛. 由此可知对任意 $|\lambda|>\lim_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 有（仿照 von Newmann 级数的处理）

$$(\lambda I-A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}(I-A/\lambda)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}},$$

因此 $\lambda\in\rho(A)$，故 $r_\sigma(A)\leqslant \lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$.

【Step 3. 证明 $r_\sigma(A)\geqslant \lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$】

对任意 $f\in(\mathcal{L}(X))^*$，考虑 $\rho(A)$ 上的全纯函数 $u_f(\lambda)=f(R_\lambda(A))$，一方面它在 $|\lambda|>r_\sigma(A)$ 上存在唯一的 Laurent 展开，另一方面在 $|\lambda|>\lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$ 上有

$$R_\lambda(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\Rightarrow f(R_\lambda(A))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(A^n)}{\lambda^{n+1}},$$

从而这就是它在 $|\lambda|>r_\sigma(A)$ 上的 Laurent 展开. 对任意 $\varepsilon>0$，取 $\lambda=r_\sigma(A)+\varepsilon$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|f(A^n)|}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}|f(T_n)|<\infty,\quad T_n:=\frac{A^n}{(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{n+1}},$$

根据一致有界原理可知

$$\sup_n|f(T_n)|=\sup_n|T_n^{**}(f)|<\infty,\forall f\in(\mathcal{L}(X))^*\Rightarrow C:=\sup_n||T_n^{**}||=\sup_n||T_n||<\infty,$$

从而

$$||A^n||^{\frac{1}{n}}\leqslant C^{\frac{1}{n}}(r_\sigma(A)+\varepsilon)^{\frac{n+1}{n}}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}\leqslant r_\sigma(A)+\varepsilon,$$

由 ε 任意性可知 $r_\sigma(A)\geqslant \lim\limits_{n\to\infty}||A^n||^{\frac{1}{n}}$.

¶ 一些例子

例 2.10 设 $A\in\mathcal{L}(C[0,1]),A(u(t))=tu(t)$，则 A 无特征值.

例 2.11 对于 $A\in\mathcal{L}(C[0,1]),A(u(t))=tu(t)$ 有 $\sigma(A)=\sigma_r(A)=[0,1]$（即所有谱都是剩余谱）.

对任意 $\lambda\in\mathbb{C}\backslash[0,1]$，令

$$T:C[0,1]\to C[0,1],\quad u(t)\mapsto\frac{1}{\lambda-t}u(t),\tag{2.125}$$

则 $(\lambda I-A)T=I=T(\lambda I-A)$，并且

$$||Tu||\leqslant\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{1}{\lambda-t}\right|||u||\Rightarrow T\in\mathcal{L}(C[0,1]),\tag{2.126}$$

因此 $\mathbb{C}\backslash[0,1]\subset\rho(A)$.

另一方面对任意 $\lambda\in[0,1]$，设 $v(t)=(\lambda I-A)u=(\lambda-t)v(t)\in \mathrm{Ran}(\lambda I-A)$，由于 $v(\lambda)=0$，因此常值函数 $1\notin\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}$，即 $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}\neq X$，因此 $\lambda\in\sigma_r(A)$.

例 2.12 设 $A\in\mathcal{L}(L^2[0,1]), A(u(t))=tu(t)$，则 $\sigma(A)=\sigma_c(A)=[0,1]$（即所有谱都是连续谱）.

与上例类似可证 $\mathbb{C}\backslash[0,1]\subset\rho(A)$，反过来对任意 $\lambda\in[0,1]$，由于常值函数 $1\notin\mathrm{Ran}(\lambda I-A)$（否则存在 $u\in L^2[0,1],(\lambda-t)u(t)=1$，矛盾），因此 $\mathrm{Ran}(\lambda I-A)\neq X$，下证 $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}=X$，对任意 $v\in L^2[0,1],\varepsilon>0$，考虑

$$u_\varepsilon(t)=\frac{v(t)}{\lambda-t}\chi_{[0,1]\backslash(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}(t)\Rightarrow(\lambda I-A)u_\varepsilon=v\chi_{[0,1]\backslash(\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon)}\xrightarrow{L^2}v, \tag{2.127}$$

得证.

例 2.13 右位移算子的谱 考虑右移位算子

$$A:\ell^2\to\ell^2,\quad(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,x_1,x_2,\cdots), \tag{2.128}$$

容易验证 $||A||=1$，因此 $r_\sigma(A)=1$，即 $\sigma(A)\subset\overline{D}$. 对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有

$$(\lambda I-A)(x_1,x_2,\cdots)=(\lambda x_1,\lambda x_2-x_1,\lambda x_3-x_2,\cdots), \tag{2.129}$$

因此对任意 $\lambda\in\mathbb{C}$ 有 $\mathrm{Ker}\,(\lambda I-A)=\{0\}$，说明 $\sigma_p(A)=\emptyset$. 下面讨论剩余谱与连续谱.

- $\sigma_r(A)=D$. 只需证明 $D\subset\sigma_r(A)$，即对任意 $|\lambda|<D$，证明 $\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}\neq\ell^2$，由于 ℓ^2 为 Hilbert 空间，因此这等价于 $\mathrm{Ran}(\lambda I-A)^\perp\neq\{0\}$. 设 $z=(1,\bar\lambda,\bar\lambda^2,\cdots)\in\ell^2$，容易验证 $\langle(\lambda I-A)x,z\rangle=0,\forall x\in\ell^2$.
- $\sigma_c(A)=\partial D$. 只需证明 $\partial D\subset\sigma_c(A)$，即对任意 $|\lambda|=1$，证明

$$\mathrm{Ran}(\lambda I-A)\neq\ell^2,\quad\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I-A)}=\ell^2, \tag{2.130}$$

设 $y=(\lambda I-A)x$，则

$$\begin{cases}y_1=\lambda x_1,\\ y_k=\lambda x_k-x_{k-1},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\lambda x_1,\\ \lambda^{k-1}y_k=\lambda^k x_k-\lambda^{k-1}x_{k-1},\end{cases}\Rightarrow\sum_{k=1}^n\lambda^{k-1}y_k=\lambda^n x_n, \tag{2.131}$$

若 $\mathrm{Ran}(\lambda I-A)=\ell^2$，取 $y=e_1$ 可得 $\lambda^n x_n=1,\forall n\in\mathbb{N}$，因此

$$x=(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda^2},\cdots)\notin\ell^2, \tag{2.132}$$

矛盾，故 $\mathrm{Ran}(\lambda I-A)\neq\ell^2$. 另一方面，设 $z\in\mathrm{Ran}(\lambda I-A)^\perp$，即对任意 x 有 $\langle(\lambda I-A)x,z\rangle=0$，取 $x=e_n$ 可得 $z_{n+1}=\bar\lambda z_n$，因此 $|z_{n+1}|=|z_n|$，$z\in\ell^2$ 必有 $z=0$，因此 $\mathrm{Ran}(\lambda I-A)^\perp=\{0\}$，得证.

第 3 章 紧算子

3.1 紧算子

定义 3.1 (紧算子)

设 X, Y 为赋范空间，若线性算子 $A: X \to Y$ 将有界集映为列紧集，则称 A 为紧算子，记作 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$.

命题 3.1 (紧算子的等价刻画)

设 $A: X \to Y$ 线性，则下述等价：

(1) A 为紧算子.

(2) 对任意有界点列 $\{x_n\}$，$\{Ax_n\}$ 有收敛子列.

(3) A 将单位闭球 B 映为列紧集.

(4) A 将单位球面 S_1 映为列紧集.

注 注意到度量空间中紧与自列紧等价，因此预紧与列紧等价，因此上述所有"列紧"都可以换成"预紧".

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2)：显然.

(1) $\Leftrightarrow$ (3)：径向收缩.

(3) $\Leftrightarrow$ (4)：一边显然，设 $\{x_n\} \subset B$（不妨设 $\inf ||Ax_n|| > 0$），则可取子列 x_{n_k} 使得 $||x_{n_k}|| \to a, A(\frac{x_{n_k}}{||x_{n_k}||}) \to y$，容易验证 $Ax_{n_k} \to ay$.

例 3.1 紧算子的例子

- 恒同算子的紧性：$I \in \mathfrak{C}(X) \Leftrightarrow \dim X < \infty$（考虑单位球面 S_1）.
- 设 $K(-, -)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 上连续，定义

$$T: C[a, b] \to C[a, b], \quad (Tu)(s) = \int_a^b K(s, t)u(t)dt,$$

则 T 为紧算子.

设 $\mathcal{F} \subset C[a, b]$ 有界，记 $M = \sup_{u \in \mathcal{F}} ||u|| < \infty$，则 $\sup_{u \in \mathcal{F}} ||Tu|| \leqslant M||T|| < \infty$ 说明 $T(\mathcal{F})$ 一致有界，下证其等度连续.K 的连续性蕴含一致连续，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得

$$\sup_{|s'-s''|<\delta} |K(s', t) - K(s'', t)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)},$$

因此只要 $|s' - s''| < \delta$，就有

$$|(Tu)(s') - (Tu)(s'')| \leqslant \int_a^b |K(s', t) - K(s'', t)|\,|u(t)|dt \leqslant \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \int_b^a |u(t)|dt < \varepsilon,$$

因此由 Arzela-Ascolli 引理，$T(\mathcal{F})$ 列紧.

3.1.1 紧算子的性质

定义紧算子时并没有要求其有界，因为这已经蕴含在其定义中.

命题 3.2

设 X, Y 为赋范空间，则 $\mathfrak{C}(X, Y)$ 为 $\mathcal{L}(X, Y)$ 的线性子空间.

证明 首先对任意 $A \in \mathfrak{C}(X, Y)$ 有（注意到函数 $y \mapsto ||y||$ 连续）

$$\sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{y \in A(S_1)} ||y|| = \max\{||y|| : y \in A(S_1)\} < \infty,$$

因此 $A \in \mathcal{L}(X, Y)$，线性性易证.

在一些完备性条件下，可以证明 $\mathfrak{C}(X,Y)$ 还是一个闭子空间.

命题 3.3

若 Y 完备，$\mathfrak{C}(X,Y)$ 为 $\mathcal{L}(X,Y)$ 的闭子空间.

证明 设 $\{A_n\}\subset\mathfrak{C}(X,Y),||A_n-A||\to 0$，任取有界集 $M\subset X$（记 $C=\sup\limits_{x\in M}||x||<\infty$），只需证明 $A(M)$ 列紧，也即其完全有界（完备性）. 对任意 $\varepsilon>0$，存在 N 使得

$$||A-A_N||<\frac{\varepsilon}{3C},$$

$A_N(M)$ 列紧说明存在 $\{x_1,\cdots,x_m\}\subset M$ 使得

$$A_N(M)\subset\bigcup_{k=1}^{n}B(Ax_k,\varepsilon/3),$$

即 $\{A_Nx_1,\cdots,A_Nx_m\}$ 为 $A_N(M)$ 的 $\varepsilon/3$-网. 对任意 $x\in M$，存在 x_k 使得 $||A_Nx-A_Nx_k||<\varepsilon/3$，因此

$$||Ax-Ax_k||\leqslant||Ax-A_Nx||+||A_Nx-A_Nx_k||+||A_Nx_k-Ax_k||<\varepsilon,$$

这说明 $\{Ax_1,\cdots,Ax_m\}$ 为 $A(M)$ 的 ε-网，即 $A(M)$ 完全有界，得证.

下述命题表明，紧算子有某种“理想”的性质.

命题 3.4 (紧算子与有界算子的复合)

(1) $\forall A\in\mathfrak{C}(X,Y),T\in\mathcal{L}(Y,Z),T\circ A\in\mathfrak{C}(X,Z)$.

(2) $\forall T\in\mathcal{L}(X,Y),A\in\mathfrak{C}(Y,Z),A\circ T\in\mathfrak{C}(X,Z)$.

证明 (1) $\{x_n\}\subset X$ 有界 $\Rightarrow\{Ax_n\}\subset Y$ 有收敛子列 $Ax_{n_k}\to y\Rightarrow T(Ax_{n_k})=(T\circ A)x_{n_k}\to Ty$，即 $T\circ A\in\mathfrak{C}(X,Z)$.

(2) $\{x_n\}\subset X$ 有界 $\Rightarrow\{Tx_n\}\subset Y$ 有界 $\Rightarrow\{(A\circ T)x_n\}$ 有收敛子列，即 $A\circ T\in\mathfrak{C}(X,Z)$.

命题 3.5 (紧算子值域的可分性)

紧算子的值域可分.

证明 由于 $\mathrm{Ran}(A)=\bigcup_{n=1}^{\infty}A(B_X(0,n))$，其中每个 $A(B_X(0,n))$ 列紧 $\Rightarrow$ 完全有界 $\Rightarrow$ 可分，从而 $\mathrm{Ran}(A)$ 可分.

命题 3.6 (紧算子的伴随)

若 Y 完备，则 $A\in\mathfrak{C}(X,Y)$ 当且仅当 $A^*\in\mathfrak{C}(Y^*,X^*)$.

证明 $\Rightarrow$: 任取有界序列 $\{f_n\}\subset Y^*$（设 $M=\sup_n||f_n||$），下证 $\{A^*f_n\}$ 有收敛子列，记 $\phi_n=f_n|_{\overline{A(B_1)}}\in C(\overline{A(B_1)})$，则

$$||A^*f_n||=\sup_{x\in B_1}||A^*f_n(x)||=\sup_{y\in A(B_1)}||f_n(y)||=\sup_{y\in\overline{A(B_1)}}||f_n(y)||=||\phi_n||_{C(\overline{A(B_1)})},$$

因此等价于证明 $\{\phi_n\}\subset C(\overline{A(B_1)})$ 有收敛子列，根据 Arzela-Ascolli 引理，只需分别验证其（一致）有界与等度连续.

- 一致有界：首先对任意 $y\in\overline{A(B_1)}$，取 $\{x_n\}\subset B_1,Ax_n\to y$，则

$$||y||\leqslant||Ax_n-y||+||Ax_n||\leqslant||Ax_n-y||+||A||\Rightarrow||y||\leqslant||A||,$$

  因此 $||\phi_n||_{C(\overline{A(B_1)})}=\sup_{y\in\overline{A(B_1)}}||f_n(y)||\leqslant M||A||$.
- 等度连续：注意到 $|\phi_n(y)-\phi_n(z)|\leqslant M||y-z||$.

$\Leftarrow$: 由上文可知 $A^{**}\in\mathfrak{C}(X^{**},Y^{**})$，注意到对任意 $x\in X,f\in Y^*$ 有

$$\langle A^{**}x^{**},f\rangle=\langle x^{**},A^*f\rangle=A^*f(x)=f(Ax)\Rightarrow||A^{**}x^{**}||_{Y^{**}}=||Ax||_Y,$$

因此对任意有界点列 $\{x_n\}\subset X$，$\{x_n^{**}\}\subset X^{**}$ 有界（$X\hookrightarrow X^{**}$ 为等距嵌入），从而 $\{A^{**}x_n^{**}\}\subset Y^{**}$ 有收敛子

列，这等价于 $\{Ax_n\}\subset Y$ 有收敛子列.

¶ 全连续算子

定义 3.2 (全连续算子)

设 X,Y 为赋范空间，若线性算子 $A:X\to Y$ 将弱收敛序列映为（强）收敛序列，则称 A 全连续. ♣

定理 3.1 (紧性与全连续性)

对于 $A\in\mathcal{L}(X,Y)$ 有

(1) 若 A 紧，则 A 全连续.

(2) 若 A 全连续且 X 自反，则 A 紧. ♡

注 这一定理在 Hilbert 空间上很有用.

证明 (1) 若不然，则存在序列 $x_n\overset{w}{\to}x_0, ||Ax_n-Ax_0||\not\to 0$，即存在 $\varepsilon_0>0$ 及子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $||Ax_{n_k}-Ax_0||\geqslant\varepsilon_0$. 但 $x_{n_k}\overset{w}{\to}x_0$ 且弱收敛序列有界，因此 $\{Ax_{n_k}\}$ 有收敛子列（不妨设其自身收敛到 y），由 $\{x_{n_k}\}$ 的弱收敛性，对任意 $f\in Y^*$ 有

$$f(Ax_{n_k}-Ax_0)=(A^*f)(x_{n_k}-x_0)\to 0\Rightarrow Ax_{n_k}\overset{w}{\to}Ax_0,$$

但已知 $Ax_{n_k}\to y$，故 $Ax_0=y$，这说明 $Ax_{n_k}\to Ax_0$，矛盾. 故 A 全连续.

(2) 设 $\{x_n\}\subset X$ 有界，则 X 自反说明其弱列紧（Eberlein-Smulian），即存在子列 $x_{n_k}\overset{w}{\to}x_0$，由全连续可知 $Ax_{n_k}\to Ax_0$，说明 $\{Ax_n\}$ 有收敛子列，即 A 为紧算子.

¶ 有限秩算子

定义 3.3 (有限秩算子)

设 X,Y 为赋范空间,若线性算子 $A:X\to Y$ 满足 $\dim R(A)<\infty$,则称之为有限秩算子,记作 $A\in\mathfrak{F}(X,Y)$. ♣

命题 3.7

$\mathfrak{F}(X,Y)$ 为 $\mathfrak{C}(X,Y)$ 的线性子空间. ♠

证明 设 $A\in\mathfrak{F}(X,Y)$，$M\subset X$ 有界，则连续性说明 $A(M)\subset\mathrm{Ran}(A)$ 有界，在有限维空间中这等价于列紧. 进一步的线性性是显然的.

注 这门课中的“自列紧集”对应一般的“列紧集”，因此在欧氏空间中列紧当且仅当有界.

由于当 Y 完备时 $\mathfrak{C}(X,Y)\subset\mathcal{L}(X,Y)$ 闭，因此有时为了证明一个算子是紧算子，可以考虑取一系列有限秩算子来逼近它.

当 Y 完备时有

$$\overline{\mathfrak{F}(X,Y)}\subset\mathfrak{C}(X,Y)=\overline{\mathfrak{C}(X,Y)}\subset\mathcal{L}(X,Y),$$

在一些特殊情形下，可以证明这里的包含实际上是相等.

命题 3.8 (Hilbert 空间上的有限秩算子)

设 H 为 Hilbert 空间，则 $\overline{\mathfrak{F}(H)}=\mathfrak{C}(H)$. ♠

证明 任取 $T\in\mathfrak{C}(H),\varepsilon>0$，下面构造 $T_\varepsilon\in\mathfrak{F}(H)$ 使得 $||T-T_\varepsilon||\leqslant\varepsilon$.

T 紧说明 $\overline{T(B(0,1))}\subset H$ 紧，即其存在有限 $\varepsilon/2$-网 $\{y_1,\cdots,y_n\}$，令 $E_\varepsilon=\mathrm{Span}(y_1,\cdots,y_n)$，记 P_ε 为 H 中到 E_ε 的投影（$\dim E_\varepsilon<\infty$ 说明 $P_\varepsilon\in\mathfrak{F}(H)$），令 $T_\varepsilon:=P_\varepsilon T\in\mathfrak{F}(H)$，则对任意 $x\in B(0,1)$，存在 y_i 使得

$||Tx - y_i|| < \varepsilon/2$，从而

$$||Tx - T_\varepsilon x|| = ||Tx - P_\varepsilon Tx|| \leqslant ||Tx - y_i|| + ||P_\varepsilon(y_i - Tx)|| \leqslant 2||Tx - y_i|| < \varepsilon,$$

因此 $||T - T_\varepsilon|| \leqslant \varepsilon$，得证.

事实上，上述命题中“Hilbert 空间”的条件还可以修改为“存在 Schauder 基”.

定义 3.4 (Schauder 基)

设 X 为 Banach 空间，称 $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ 为其 Schauder 基，若对任意 $x \in X$，存在唯一序列 $\{C_n(x)\} \subset \mathbb{C}$ 使得

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} C_n(x)e_n.$$

♣

注 显然具有 Schauder 基的空间必可分.

引理 3.1

设 X 有 Schauder 基，则定义中的 $C_n \in X^*$.

♡

命题 3.9

若 Banach 空间 X 上有 Schauder 基，则 $\overline{\mathfrak{F}(X)} = \mathfrak{C}(X)$.

♠

证明 任取 $T \in \mathfrak{C}(X)$，记 $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i(x)e_i$，则由引理 + 一致有界定理可知存在 M 使得 $\sup_n ||S_n|| \leqslant M$. 记 $T_n = S_nT \in \mathfrak{F}(X)$，下证 $T_n \to T$.

T 紧说明 $\overline{T(B(0,1))} \subset X$ 紧，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在有限 $\frac{\varepsilon}{3(M+1)}$-网 $\{y_1, \cdots, y_m\}$，由 Schauder 基定义可知，存在 N，使得对任意 $n > N, i = 1, \cdots, m$ 有 $||y_i - S_ny_i|| < \varepsilon/3$.

对任意 $x \in X$，存在 y_i 使得 $||Tx - y_i|| < \frac{\varepsilon}{3(M+1)}$，从而对任意 $n > N$ 有

$$||Tx - T_nx|| = ||Tx - S_nTx|| \leqslant ||Tx - y_i|| + ||y_i - S_ny_i|| + ||S_n(y_i - Tx)|| < \frac{\varepsilon}{3(M+1)} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{M\varepsilon}{3(M+1)} < \varepsilon,$$

从而 $||T - T_n|| \leqslant \varepsilon$，即 $T_n \to T$，得证.

3.2 紧算子的谱

3.2.1 Riesz-Fredholm 理论

定理 3.2 (Riesz-Fredholm)

设 $A \in \mathfrak{C}(X), T = I - A$，则

(1) $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$.

(2) $\operatorname{Ran} T$ 为 X 的闭子空间（T 是闭值域算子）.

(3) $\operatorname{Ran} T = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$.

♡

注 对于 $\mathcal{F} \subset X^*$，定义零化子 $\mathcal{F}^\perp = \{x \in X : f(x) = 0, \forall f \in \mathcal{F}\}$.

证明 (1) 令 $M = \operatorname{Ker} T$ 则其单位球面 $S_M = M \cap S_1$，而 $x \in S_M$ 当且仅当 $x \in S_1$ 且 $x = Ax$，即 $S_M \subset A(S_M)$，因此 S_M 列紧，这等价于 $\dim M = \dim \operatorname{Ker} T < \infty$.

(2) 设 $\operatorname{Ran}(T) \ni y_n \to y \in X$，下证 $y \in \operatorname{Ran}(T)$. 首先易知存在 $x_n \in X$ 使得 $y_n = Tx_n$.

- 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{Ax_n\}$ 存在子列 $Ax_{n_k} \to u \in X$，而

$$x_{n_k} = (T + A)x_{n_k} = y_{n_k} + Ax_{n_k} \to y + u \Rightarrow y_{n_k} = Tx_{n_k} \to T(y + u),$$

因此 $y = T(y + u) \in \operatorname{Ran}(T)$.

- 若 $\{x_n\}$ 无界，令 $d_n = d(x_n, \operatorname{Ker} T)$. $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$ 说明存在最佳逼近元 $z_n \in \operatorname{Ker} T$ 使得 $||x_n - z_n|| = d_n$. 断言 $\{x_n - z_n\}$ 有界，从而由 $T(x_n - z_n) = y_n$，问题转化到了有界情形.

  若不然，设 $v_n = \frac{x_n - z_n}{||x_n - z_n||} = \frac{x_n - z_n}{d_n}$，$\{y_n\}$ 有界说明 $Tv_n = y_n/d_n \to 0$，另一方面 $||v_n|| = 1$ 说明 $\{Av_n\}$ 有子列 $Av_{n_k} \to w$，并且

$$v_{n_k} = Tv_{n_k} + Av_{n_k} \to w \Rightarrow Tv_{n_k} \to Tw = 0, w \in S_1 \cap \operatorname{Ker} T,$$

  但对任意 $z \in \operatorname{Ker} T$ 有

$$||v_n - z|| = \frac{1}{d_n}||x_n - (z_n + d_n z)|| \geqslant \frac{1}{d_n} d(x_n, \operatorname{Ker} T) = 1,$$

  因此 $d(v_n, \operatorname{Ker} T) \geqslant 1$，这与 $v_{n_k} \to w \in \operatorname{Ker} T$ 矛盾，说明 $\{x_n - z_n\}$ 有界.

引理 3.2

设 $A \in \mathfrak{C}(X), T = I - A$，则

(1) 升链 $\operatorname{Ker} T \subsetneq \operatorname{Ker} T^2 \subsetneq \cdots$ 必有终止.

(2) 降链 $\operatorname{Ran} T \supsetneq \operatorname{Ran} T^2 \supsetneq \cdots$ 必有终止.

(3) 若设升链长度为 p，降链长度为 q，则 $p = q$.

♡

证明 (1) 假设有严格无穷升链 $\operatorname{Ker} T \subsetneq \operatorname{Ker} T^2 \subseteq \cdots$，则由 Riesz 引理，存在

$$x_n \in S_1 \cap \operatorname{Ker} T^{n+1}, \quad d(x_n, \operatorname{Ker} T^n) \geqslant \frac{1}{2},$$

并且对任意 $n > m$ 有

$$T^n(Tx_n + Ax_m) = T^{n+1}x_n + T^n A x_m = A(T^n x_m) = 0 \Rightarrow Tx_n + Ax_m \in \operatorname{Ker} T^n$$

进一步 $||Ax_n - Ax_m|| = ||x_n - (Tx_n + Ax_m)|| \geqslant 1/2$，但 $\{x_n\} \subset S_1$ 有界，这与 A 的紧性矛盾.

(2) 若不然，则该降链为真闭子空间降链，由 Riesz 引理，存在

$$x_n \in \operatorname{Ran}(T^n) \cap S_1, \quad d(x_n, \operatorname{Ran}(T^{n+1})) \geqslant \frac{1}{2}.$$

对任意 $m > n$ 有（其中 $x_m \in \operatorname{Ran}(T^m) \subset \operatorname{Ran}(T^{n+1}), Tx_m \in \operatorname{Ran}(T^{m+1}) \subset \operatorname{Ran}(T^{n+1}), Tx_n \in \operatorname{Ran}(T^{n+1})$）

$$Ax_n - Ax_m = x_n - (x_m + Tx_n - Tx_m) \Rightarrow ||Ax_n - Ax_m|| \geqslant d(x_n, \operatorname{Ran}(T^{n+1})) \geqslant \frac{1}{2},$$

与 A 的紧性矛盾.

(3) 首先证明 $p \leqslant q$，若不然则 $p > q$，这说明 $\operatorname{Ker} T^q \subsetneq \operatorname{Ker} T^{q+1}$，存在 $x \in \operatorname{Ker} T^{q+1}, x \notin \operatorname{Ker} T^q$. 设 $y = T^q x \in \operatorname{Ran}(T^q) = \cdots = \operatorname{Ran}(T^p)$，则存在 $z \in X$ 使得 $y = T^q x = T^p z$，而 $0 = T^{q+1}x = Ty = T^{p+1}z$ 说明 $z \in \operatorname{Ker} T^{p+1} = \operatorname{Ker} T^p$，由此可得 $y = T^p z = 0, x \in \operatorname{Ker} T^q$，矛盾.

进一步证明 $p = q$，若不然则 $p < q$，这说明 $\operatorname{Ran}(T^p) \supsetneq \operatorname{Ran}(T^{p+1})$，存在 $x = T^p y \in \operatorname{Ran}(T^p), x \notin \operatorname{Ran}(T^{p+1})$，而 $T^{q-p}x = T^q y \in \operatorname{Ran}(T^q) = \operatorname{Ran}(T^{q+1})$ 说明存在 $z \in X$ 使得 $T^q y = T^{q+1}z, y - Tz \in \operatorname{Ker} T^q = \operatorname{Ker} T^p$（因为 $p \leqslant q$），故 $x = T^p y = T^{p+1}z \in \operatorname{Ran}(T^{p+1})$，矛盾.

定理 3.3 (Fredholm 二择一律)

设 $A \in \mathfrak{C}(X), T = I - A$，则 T 的单性与满性等价.

♡

注 对于方程 $Tx = b$，二择一律说明其解必为如下某种情形：

- 对任意 $b \in X$，$Tx = b$ 存在唯一解（这等价于 T 为双射）.
- $Tx = 0$ 有非零解（这等价于 T 不是单射）.

证明 若 T 满，任取 $x_0 \in \operatorname{Ker} T$，可以找到一列点 $x_1, x_2, \cdots$ 使得

$$Tx_1 = x_0, Tx_2 = x_1, \cdots \Rightarrow x_0 = Tx_1 = T^2 x_2 = \cdots = T^n x_n = \cdots$$

但由于核升链有终止，因此存在 N 使得任何 $\operatorname{Ker} T^n \subset \operatorname{Ker} T^N$，当 $n > N$ 时

$$x_0 = T^n x_n \in T^n(\operatorname{Ker} T^{n+1}) \subset T^n(\operatorname{Ker} T^N) = \{0\},$$

故 $\operatorname{Ker} T = 0$，即 T 单.

若 T 单，考虑降链 $X \supsetneq \operatorname{Ran}(T) \supsetneq \operatorname{Ran}(T^2) \supsetneq \cdots$，由引理可知必然存在 N 使得 $\operatorname{Ran}(T^N) = \operatorname{Ran}(T^{N+1})$，即 $T(T^N(X)) = T^N(X) = T(T^{N-1}(X))$，$T$ 单说明 $T^N(X) = T^{N-1}(X)$，以此类推可得 $T(X) = X$，即 T 满.

3.2.2 紧算子的谱

定理 3.4 (Riesz-Schauder)

设 X 完备且 $A \in \mathfrak{C}(X)$，则

(1) 若 $\dim X = \infty$，则 $0 \in \sigma(A)$.

(2) 非零谱点一定是特征值，即 $\sigma(A) \backslash \{0\} = \sigma_p(A) \backslash \{0\}$.

(3) 非零特征值的特征子空间维数有限，并且不同特征值对应的特征向量线性无关.

(4) 0 为 $\sigma(A)$ 的唯一可能极限点.

♡

证明 (1) 注意到 $0 \in \rho(A)$ 当且仅当 $-A$ 可逆（即 A 可逆），当且仅当 $I = AA^{-1}$ 紧，当且仅当 $\dim X < \infty$.

(2) 若 $\lambda \neq 0$ 且 $\lambda \notin \sigma_p(A)$，则 $\lambda I - A$ 单，由二择一律可知其满，故 $\lambda \in \rho(A)$.

(3) 若 $\lambda \neq 0$，则 $\operatorname{Ker}(\lambda I - A) = \operatorname{Ker}(I - \lambda^{-1}A)$，有 Riesz-Fredholm 可得. 线性无关性是显然的.

(4) 若 $\sigma(A)$ 有非零极限点 λ_0，设 $\{\lambda_n\} \subset \sigma(A), \lambda_n \to \lambda_0$（不妨设 $\lambda_n \neq 0$），由 (2) 可知这些 λ_n 都是特征值，取 $0 \neq x_n \in \operatorname{Ker}(\lambda_n I - A)$，则 $\{x_n\}$ 线性无关，令 $X_n = \operatorname{Span}(x_1, \cdots, x_n)$，则 $X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots$，由 Riesz 引理，存在

$$y_n = \sum_{k=1} \alpha_k^n x_k \in X_n \cap S_1, \quad d(y_n, X_{n-1}) > \frac{1}{2},$$

则

$$Ay_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \lambda_k x_k \in X_n, \quad (\lambda_n I - A)y_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_k)\alpha_k^n x_k \in X_{n-1},$$

从而对任意 $n > m$ 有

$$\left\| A\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) - A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right\| = \left\| y_n - \left[(\lambda_n I - A)\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right) + A\left(\frac{y_m}{\lambda_m}\right) \right] \right\| > \frac{1}{2},$$

与 A 的紧性矛盾.

推论 3.1

设 $A \in \mathfrak{C}(X)$，则 $\sigma(A)$ 至多可数.

♡

证明 用一列同心紧圆环分解 $\mathbb{C}$，则 $\sigma(A) = \bigcup_k E_k$，其中每个 E_k 都有限（否则根据有界集的列紧性可得 $\sigma(A)$ 的非零聚点），故 $\sigma(A)$ 至多可数.

由此可以给出 $\sigma(A)$ 的刻画.

推论 3.2

设 X 完备，$A \in \mathfrak{C}(X)$，则 $\sigma(A)$ 只有如下三种情形：

- $\sigma(A) = \{0\}$.
- $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.
- $\sigma(A) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$，其中 $\lambda_n \to 0$.

♡

¶ 紧算子谱的例子

下面给出一些例子，说明在无穷维 Banach 空间中，这些情形都是可能出现的（包括 0 作为点谱、剩余谱、连续谱）.

例 3.2 $\sigma(A) = \{0\}$

- 若 $A_1 = 0$，则 $\sigma(A_1) = \sigma_p(A_1) = \{0\}$.
- 设 $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$，考虑紧算子（由 Arzela-Ascoli 定理易证其紧）

$$A_2 : X \to X, \quad f(t) \mapsto \int_0^t f(s)ds,$$

  通过求导解方程可得 $\sigma(A_2) = \{0\}, \sigma_p(A_2) = \emptyset$，对任意满足 $p(0) = 0$ 的多项式函数 p，p' 可以由一列多项式 $\{q_n\} \subset C[0,1]$ 逼近，将其积分得到 $\{A_2 q_n\} \subset X$，并且 $A_2 q_n \to p$，因此 $p \in X$，由 Weierstrass 逼近定理可得[1] $\overline{R(A_2)} = X$，故 $0 \in \sigma_c(A_2)$.
- 设 $\{\lambda_n\}$ 为一列收敛到 0 的非零序列，考虑紧算子（它是紧算子与有界线性算子的复合）

$$A_3 : \ell^2 \to \ell^2, \quad (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (0, \lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \cdots,)$$

  则易证 $\sigma(A_3) = \{0\}, \sigma_p(A_3) = \emptyset$，并且 $\overline{R(A_3)} \neq \ell^2$（至少它不包含 e_1），因此 $0 \in \sigma_r(A_3)$

例 3.3 $\sigma(B) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$

- 考虑紧算子（它是有限秩算子）

$$B_1 : \ell^2 \mapsto \ell^2, \quad (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \cdots, \lambda_n a_n, 0, 0, \cdots),$$

  则 $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$.
- 设 $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$，考虑（其中 A_2 见上例，紧算子的 product 还是紧算子）

$$B_2 : \mathbb{C}^n \times X \to \mathbb{C}^n \times X, \quad (x_1, \cdots, x_n; f) \mapsto (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_n x_n; A_2 f),$$

  则 $\sigma_p(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}, 0 \in \sigma_c(A)$（因为 $\overline{R(B_2)} = \overline{\mathbb{C}^n \times R(A_2)} = \mathbb{C}^n \times \overline{R(A_2)} = \mathbb{C}^n \times X$）.
- 考虑紧算子（其中 A_3 见上例）

$$B_3 : \mathbb{C}^n \times \ell^2 \to \mathbb{C}^n \times \ell^2, \quad (x_1, \cdots, x_n; \xi) \mapsto (\lambda_1 x_1, \cdots, \lambda_n x_n; A_3 \xi),$$

  则 $\sigma_p(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}, 0 \in \sigma_r(A)$（因为 $\overline{R(B_3)} = \overline{\mathbb{C}^n \times R(A_3)} = \mathbb{C}^n \times \overline{R(A_3)} \neq \mathbb{C}^n \times X$）.

例 3.4 $\sigma(F) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}, \lambda_n \to 0$

- 考虑紧算子（它可以由有限秩算子逼近）

$$F_1 : \ell^2 \mapsto \ell^2, \quad (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (0, \lambda_1 a_2, \lambda_2 a_3, \cdots),$$

  则 $\sigma_p(F_1) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$.
- 考虑紧算子

$$F_2 : \ell^2 \mapsto \ell^2, \quad (a_1, a_2, \cdots) \mapsto (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \cdots),$$

  则 $\sigma_p(F_2) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}, 0 \in \sigma_c(F_2)$（容易验证 $\overline{R(F_2)}^{\perp} = \{0\}$）.
- 考虑紧算子（F_2, A_3 均见前文）

$$F_3 : \ell^2 \to \ell^2, \quad (\alpha, \beta) \mapsto (F_2 \alpha, A_3 \beta),$$

  则 $\sigma_p(F_3) = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}, 0 \in \sigma_r(F_3)$（因为 $\overline{R(F_3)} = \overline{R(F_2) \times R(A_3)} = \ell^2 \times \overline{R(A_3)} \neq \ell^2 \times \ell^2$）.

¶ 不变子空间

定义 3.5 (不变子空间)

设 X 为 Banach 空间，$A \in \mathcal{L}(X)$，若 $M \leqslant X$ 满足 $A(M) \subset M$，则称之为 A 的不变子空间. ♣

注 显然 $\{0\}, X$ 为 A 的平凡不变子空间.

[1] 注意，X 中任意函数都可以用在 0 处取 0 的多项式函数逼近.

引理 3.3

(1) 若 M 为 A 的不变子空间，则 $\overline{M}$ 也是 A 的不变子空间.
(2) 若 $\lambda\in\sigma_p(A)$，则 $\operatorname{Ker}(\lambda I-A)$ 为 A 的闭不变子空间.
(3) 对任意 $y\in X$，$L_y:=\{p(A)y:p\in\mathbb{C}[x]\}$ 是 A 的不变子空间.

下述定理说明了紧算子不变子空间的存在性.

定理 3.5

设 X 为 Banach 空间且 $\dim X\geqslant 2$，则任意 $A\in\mathfrak{C}(X)$ 有非平凡闭不变子空间.

证明 不妨设 $\dim X=\infty, A\neq 0, ||A||=1, \sigma_p(A)\backslash\{0\}=\emptyset$（从而 $\sigma(A)=\{0\}$）. 假设 A 没有非平凡闭不变子空间，则对任意 $y\in X$ 有 $\overline{L_y}=X$. 首先取 $||x_0||>1, ||Ax_0||>1$，则 $C:=\overline{A(B(x_0,1))}\subset X$ 紧且不包含 0.

对任意 $y_0\in C$，存在 A 的多项式 $T_{y_0}=T_{y_0}(A)\in\mathbb{C}[A]$ 使得 $||T_{y_0}y-x_0||<1$，从而存在 $\delta_{y_0}>0$ 使得 $||T_{y_0}y-x_0||<1,\forall x\in B(y_0,\delta_{y_0})$. 这些球构成的 C 的开覆盖，从而可取有限子覆盖 $\bigcup_{i=1}^n B(y_i,\delta_i)\supset C$，从而对任意 $y\in C$，存在 i_1 使得

$$||T_{i_1}y-x_0||<1\Rightarrow T_{i_1}y\in B(x_0,1)\Rightarrow AT_{i_1}y\in C,$$

从而存在 i_2 使得

$$||T_{i_2}AT_{i_1}y-x_0||=||T_{i_2}T_{i_1}Ay-x_0||<1,$$

以此类推，存在 $i_1,i_2,\cdots$ 使得（其中 $\mu=\max_{i=1}^n||T_i||$）

$$\left|\left|\prod_{j=1}^{k+1}T_{i_j}A^ky-x_0\right|\right|<1\Rightarrow ||x_0||-1<\left|\left|\prod_{j=1}^{k+1}T_{i_j}A^ky\right|\right|\leqslant\mu^{k+1}||A^ky||,$$

因此

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{||x_0||-1}{\mu||y||}\right)\leqslant\left(\frac{||A^ky||}{||y||}\right)^{\frac{1}{k}}\leqslant||A^k||^{\frac{1}{k}},$$

令 $k\to\infty$ 可得 $1/\mu\leqslant 0$，矛盾.

3.3 Hilbert-Schmidt 定理

本节讨论 Hilbert 空间上对称算子、对称紧算子的谱.

定义 3.6 (对称算子)

设 H 为 Hilbert 空间，$A\in\mathcal{L}(H)$，若对任意 $x,y\in H$ 有 $\langle Ax,y\rangle=\langle x,Ay\rangle$，则称 A 为 H 上的对称算子.

命题 3.10

设 H 为 Hilbert 空间，$A\in\mathcal{L}(H)$，则
(1) A 对称当且仅当 $\langle Ax,x\rangle\in\mathbb{R},\forall x\in H$.
(2) 若 A 对称，则 $\sigma(A)\subset\mathbb{R}$ 且对任意 $x\in H,\lambda\in\mathbb{C},\Im\lambda\neq 0$ 有（$\Im$ 表示虚部）

$$||(\lambda I-A)^{-1}x||\leqslant\frac{1}{|\Im\lambda|}||x||.$$

(3) 若 A 对称，$H_1\leqslant H$ 为 A 的闭不变子空间，则 $A|_{H_1}:H_1\to H_1$ 也是对称算子.
(4) 若 A 对称，则对任意 $\lambda\neq\lambda'\in\sigma_p(A)$ 有 $\operatorname{Ker}(\lambda I-A)\perp\operatorname{Ker}(\lambda' I-A)$.
(5) 若 A 对称，则 $||A||=\sup_{||x||=1}|\langle Ax,x\rangle|$.

证明 (1) 若 A 对称，则对任意 $x\in H$ 有 $\langle Ax,x\rangle=\langle x,Ax\rangle=\overline{\langle Ax,x\rangle}$，即 $\langle Ax,x\rangle\in\mathbb{R}$. 反之若该式成立，则对任

意 $x, y \in H$ 有

$$\langle A(x+y), x+y\rangle = \langle x+y, A(x+y)\rangle, \quad \langle A(x+iy), x+iy\rangle = \langle x+iy, A(x+iy)\rangle,$$

化简可得

$$\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle} + \overline{\langle Ay, x\rangle}, \quad -\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle} - \overline{\langle Ay, x\rangle},$$

相减即得.

(2) 设 $\lambda = \mu + i\nu, \nu \neq 0$，则对任意 $x \in H$ 有

$$\begin{aligned}||(\lambda I - A)x||^2 &= \langle(\lambda I - A)x, (\lambda I - A)x\rangle = \langle(\mu I - A)x + i\nu x, (\mu I - A)x + i\nu x\rangle \\ &= ||(\mu I - A)x||^2 + ||\nu x||^2 \\ &\geqslant |\nu|^2 ||x||^2,\end{aligned}$$

因此 $\lambda I - A$ 单，下证 $\mathrm{Ran}(\lambda I - A) = H$（从而 $(\lambda I - A)^{-1} \in H$）：

- $\mathrm{Ran}(\lambda I - A)$ 闭：设 $\{y_n\} = \{(\lambda I - A)x_n\} \subset \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$ 收敛到 $y \in H$，则由前面的估计可得 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，故 $x_n \to x$，从而由连续性可知 $y = (\lambda I - A)x \in \mathrm{Ran}(\lambda I - A)$.
- $(\mathrm{Ran}(\lambda I - A))^\perp = \{0\}$：只需注意到

$$(\mathrm{Ran}(\lambda I - A))^\perp = \mathrm{Ker}\,((\lambda I - A)^*) = \mathrm{Ker}\,(\bar{\lambda} I - A) = \{0\}.$$

(3)(4) 显然.

(5) 注意到对任意 $x \in H$ 有 $||x|| = \sup_{||y||=1} |\langle x, y\rangle|$，因此由 Riesz 表示定理可得

$$||A|| = \sup_{||x||=||y||=1} |\langle Ax, y\rangle| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = ||A||.$$

3.3.1 Hilbert 空间上的对称紧算子

定理 3.6

设 A 为 Hilbert 空间 H 上的对称紧算子，则存在 $||x_0|| = 1$ 满足

$$|\langle Ax_0, x_0\rangle| = \sup_{||x||=1} |\langle Ax, x\rangle| = ||A||, \quad Ax_0 = \langle Ax_0, x_0\rangle x_0.$$

♡

注 该定理说明，对称紧算子的特征值恰好是其最大特征值，也恰好对应其算子范数.

证明 不妨设 $A \neq 0$ 且 $||A|| = \sup_{||x||=1}\langle Ax, x\rangle := \lambda$，则存在 $\{x_n\} \subset S_1$ 使得 $\langle Ax_n, x_n\rangle \to \lambda$. 由 Eberlein-Smulian 定理可知 H 中的单位闭球弱自列紧，从而 $\{x_n\}$ 有子列弱收敛到 x_0（不妨设为其自身）. A 紧说明其全连续，故 $Ax_n \to Ax_0$，因此

$$|\langle Ax_n, x_n\rangle - \langle Ax_0, x_0\rangle| \leqslant |\langle A(x_n - x_0), x_n\rangle| + |\langle Ax_0, x_n - x_0\rangle| \leqslant ||Ax_n - Ax_0|| + ||Ax_0||\,||x_n - x_0|| \to 0,$$

从而 $\lambda = \langle Ax_0, x_0\rangle$，这也说明 $\lambda = \langle Ax_0, x_0\rangle \leqslant ||A||\,||x_0||^2$，即 $||x_0|| = 1$. 进一步

$$||Ax_0 - \lambda x_0|| = \langle Ax_0 - \lambda x_0, Ax_0 - \lambda x_0\rangle = ||Ax_0||^2 - \lambda^2 \leqslant ||A||^2 - \lambda^2 = 0,$$

因此 $Ax_0 = \lambda x_0$.

定理 3.7 (Hilbert-Schmidt)

设 A 为非平凡 Hilbert 空间 H 上的对称紧算子，则有至多可数个非零的，只能以 0 为聚点的实数 $\{\lambda_i\}$（计重数），它们是 A 的特征值，并对应一组规范正交基 $\{e_i\}$ 使得对任意 $x \in H$ 有

$$x = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i + \sum_j \langle x, e_j^{(0)}\rangle e_j^{(0)}, \quad Ax = \sum_i \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i.$$

其中 $\{e_j^{(0)}\}$ 为 $\mathrm{Ker}\,A$ 的规范正交基（未必可数），特别当 $0 \notin \sigma_p(A)$ 时 $\{e_j^{(0)}\} = \emptyset$，此时 $\{e_i\}$ 构成 H 的规范正交基.

♡

证明 根据 Riesz-Fredholm 可知对任意 $0 \neq \lambda \in \sigma_p(A)$ 有 $m(\lambda) := \dim \operatorname{Ker} N(\lambda I - A) < \infty$，记其规范正交基为 $\{e_i^{(\lambda)} : i = 1, \cdots, m(\lambda)\}$，由紧算子谱的刻画可知 $\sigma_p(A) - \{0\}$ 中元素可计重数排成一列 $\{\lambda_i\}$ 使之收敛到 0，记 $\{e_i\}$ 为上述对应的规范正交基（特征向量）. 若 $0 \in \sigma_p(A)$，则取 $\operatorname{Ker} A$ 的规范正交基 $\{e_j^{(0)}\}$，令

$$M = \begin{cases} \operatorname{Span}(\{e_i\}), & 0 \notin \sigma_p(A), \\ \operatorname{Span}(\{e_i\} \cup \{e_j^{(0)}\}), & 0 \in \sigma_p(A), \end{cases}$$

下证 $\overline{M} = H$，注意到 $A(\overline{M}^\perp) \subset \overline{M}^\perp$，考虑紧算子 $\tilde{A} := A|_{\overline{M}^\perp}$，由 M 的定义可知 $\tilde{A}$ 无特征值，但若 $\overline{M}^\perp \neq 0$ 则由前述定理可得其中必然有特征值，矛盾，故 $\overline{M}^\perp = 0$，得证.

第 4 章 Banach 代数

4.1 Banach 代数

定义 4.1 (代数)

称 A 为复数域 $\mathbb{C}$ 上的代数，若：

- A 是一个 $\mathbb{C}$-线性空间.
- A 是一个环.
- 相容性：$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, a, b \in A$ 有 $(\lambda a)(\mu b) = (\lambda\mu)(ab)$.

特别当 A 为幺环时，称之为一个含幺代数；当 A 为除环时，称之为一个可除代数.

注 本章出现的代数都是 $\mathbb{C}$ 上的代数，但**未必含幺**，也**未必交换**.

例 4.1 不含幺代数嵌入含幺代数 若 $\mathscr{A}$ 为一个不含幺代数，则可考虑 $\widehat{\mathscr{A}} := \mathscr{A} \times \mathbb{C}$，它具有自然的线性空间结构，以及特殊的乘法

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu), \quad \forall a, b \in \mathscr{A}, \lambda, \mu \in \mathbb{C},$$

这给出了 $\widehat{\mathscr{A}}$ 一个含幺代数（单位元为 $(0,1)$）结构，特别当 $\mathscr{A}$ 为 Banach 代数时，可以通过定义 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 上的（自然的）乘积范数赋予一个 Banach 代数结构.

定义 4.2 (Banach 代数)

设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbb{C}$-代数，若其上存在完备范数 $||\cdot||$ 满足

$$||ab|| \leqslant ||a||\,||b||, \quad \forall a, b \in \mathscr{A},$$

则称 A 为一个 Banach 代数.

注 最经典的一类 Banach 代数就是 Banach 空间上的有界线性算子 $\mathcal{L}(X)$.

下面给出一些 Banach 代数的性质，首先通过分析学中经典的二分法可证明：

命题 4.1 (乘法的连续性)

设 $\mathscr{A}$ 为 Banach 代数，则 $\mu : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}, (a, b) \mapsto ab$ 是连续的.

若 $\mathscr{A}$ 为（非平凡）含幺 Banach 代数，则显然有

$$||e|| \leqslant ||e^2|| \leqslant ||e||^2 \Rightarrow ||e|| \geqslant 1,$$

此时考虑 $\mathscr{A}$ 上的另一种范数（可以视为 $\mathscr{A} \hookrightarrow \mathcal{L}(\mathscr{A})$ 继承的范数）

$$|||a||| := \sup_{0 \neq b \in \mathscr{A}} \frac{||ab||}{||b||},$$

注意到 $\frac{||a||}{||e||} \leqslant |||a||| \leqslant ||a||$，因此两种范数等价，即 $(\mathscr{A}, |||\cdot|||)$ 也是 Banach 空间. 此外注意到 $||ab|| \leqslant |||a|||\,||b||$，因此

$$|||ab||| = \sup_{0 \neq c \in \mathscr{A}} \frac{||abc||}{||c||} \leqslant |||a|||\,|||b|||,$$

从而在新的范数下 $\mathscr{A}$ 依然是一个 Banach 代数，特别在新的范数下 $|||e||| = 1$. 综上，我们**总是可以约定含幺 Banach 代数中单位元的范数为** 1.

对于 Banach 代数的理想，可以定义商代数；若该理想是闭的，则可以定义商 Banach 空间，并且可以验证这些结构给出了一个**商 Banach 代数**结构.

命题 4.2 (Banach 代数的商)

设 I 为 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 的闭理想，则 $\mathscr{A}/I$ 在商代数以及商赋范空间结构下是 Banach 代数. 特别地若 $\mathscr{A}$ 含幺且 $||e||=1$ 则 $||[e]||_*=1$.

证明 显然 $\mathscr{A}/J$ 同时为 $\mathbb{C}$-代数以及 Banach 空间，下面证明相容性:

$$||[a][b]||_* \leqslant ||[ab]||_* \leqslant \inf_{x\in[a],y\in[b]} ||xy|| \leqslant \inf_{x\in[a],y\in[b]} ||x||\,||y|| = ||[a]||_*||[b]||_*,$$

故 $\mathscr{A}/J$ 为 Banach 代数. 最后显然 $1\leqslant ||[e]||_* \leqslant ||e||=1$，故 $||[e]||_*=1$.

定义 4.3 (半单 Banach 代数)

称 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 为半单的，若 $\mathfrak{J}=\bigcap_{J\in\mathfrak{M}} J=0$.

4.2 Gelfand 表示

4.2.1 含幺 Banach 代数的极大理想

命题 4.3

设 $\mathscr{A}$ 为含幺 Banach 代数，记 $G(\mathscr{A})$ 为 $\mathscr{A}$ 中可逆元全体，则

(1) 即若 $a\in\mathscr{A}, ||a||<1$，则 $e-a\in G(\mathscr{A})$ 且 $(e-a)^{-1}=\sum_{n=0}^\infty a^n$.

(2) $B(e,1)\subset G(\mathscr{A})$，特别地，$G(\mathscr{A})$ 为开集.

(3) 取逆 $G(\mathscr{A})\to G(\mathscr{A}), a\mapsto a^{-1}$ 为连续映射.

证明 (1) 记 $b_n=\sum_{i=0}^n a^i$，则易得 $\{b_n\}$ 为 Cauchy 列，由 $b_n(e-a)=(e-a)b_n=e-a^{n+1}\to e$ 以及乘法的连续性可知其极限即为 $(e-a)^{-1}$.

(2) 对任意 $b\in B(e,1)$ 有 $||e-b||<1$，从而 $b=e-(e-b)\in G(\mathscr{A})$. 对任意 $a\in G(\mathscr{A})$，都有 $B(a,||a^{-1}||^{-1})\subset aB(e,1)\subset G(\mathscr{A})$，故 $G(\mathscr{A})$ 为开集.

(3) 根据齐性，只需证明它在 e 处连续，任取 $\{b_n\}\subset G(\mathscr{A}), b_n\to e$（不妨设 $\sup_n ||e-b_n||<1$），则 $b_n^{-1}=(e-(e-b_n))^{-1}=\sum_{k=0}^\infty(e-b_n)^k$，进而

$$||e-b_n^{-1}||=\left|\left|\sum_{k=1}^\infty (e-b_n)^k\right|\right| \leqslant \sum_{k=1}^\infty ||e-b_n||^k = \frac{||e-b_n||}{1-||e-b_n||}\to 0,$$

故 $b_n^{-1}\to e$，得证.

下述定理刻画了可除 Banach 代数的结构:

定理 4.1 (Gelfand-Mazur)

设 $\mathscr{A}$ 是一个可除 Banach 代数且 $||e||=1$，则有等距同构 $\mathscr{A}\cong\mathbb{C}$.

证明 设 $\mathscr{B}=\{ze:z\in\mathbb{C}\}$，则显然 $\mathscr{B}\cong\mathbb{C}$，下证 $\mathscr{B}=\mathscr{A}$，假设存在 $a\in A$，对任意 $z\in\mathbb{C}$ 都有 $ze-a\neq 0$，则可定义取逆映射 $r:\mathbb{C}\to\mathscr{A}, z\mapsto(ze-a)^{-1}$.

【Step 1. 证明 r 弱解析】

即证明对任意 $f\in\mathscr{A}^*$，$F=f\circ r:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 为解析函数.

对任意 $z,z_0\in\mathbb{C}$，根据预解式可得

$$r(z)-r(z_0)=(z_0-z)r(z)r(z_0),$$

由于 r 连续（因为取逆映射连续），因此

$$F'(r_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}=-\lim_{z\to z_0} f(r(z)r(z_0))=f((r(z_0))^2),$$

这说明 $F = f \circ r$ 可微，从而其解析.

【Step 2. 证明 r 有界且在无穷远处收敛到 0】

取 $z > 2||a||$，则 $||z^{-1}a|| < 1/2 < 1$，故

$$||r(z)|| = ||(ze - a)^{-1}|| = \frac{1}{|z|}||(e - z^{-1}a)^{-1}|| \leqslant \frac{1}{|z|}\sum_{n=0}^{\infty}||z^{-1}a||^n = \frac{1}{|z|(1 - ||z^{-1}a||)} = \frac{1}{|z| - |a|},$$

令 $z \to \infty$ 可知 $||r(z)|| \to 0$，根据其连续性可知其有界.

【Step 3. 推得矛盾：$r \equiv 0$】

已知对任意 $f \in \mathscr{A}^*$，$f \circ r$ 为有界解析函数（且在无穷远处收敛到 0），故由 Liouville 定理可知 $f \circ r \equiv 0$，进而由 Hahn-Banach 定理可知 $r \equiv 0$，矛盾.

引理 4.1 (含幺 Banach 代数极大理想的闭性)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺 Banach 代数，则其任意极大理想 J 都是闭集.

♡

证明 只需证明 $\overline{J}$ 为 $\mathscr{A}$ 的真理想. 首先验证子代数结构：对任意 $a, b \in \overline{J}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$，取 J 中点列 $a_n \to a, b_n \to b$，则

$$||(\lambda a + \mu b) - (\lambda a_n + \mu b_n)|| \leqslant |\lambda|\ ||a - a_n|| + |\mu|\ ||b - b_n|| \to 0, \quad ||a_n b_n - ab|| \to 0$$

说明 $\lambda a + \mu b, ab \in \overline{J}$，仿照上面的乘法可验证吸收律，故 $\overline{J}$ 为理想.

此外，前面已经证明过 $B(e,1) \subset G(\mathscr{A})$，因此 $B(e,1) \cap J = \emptyset$，这说明 $e \notin \overline{J}$，故 J 为理想.

对于含幺**交换** Banach 代数，其极大理想是闭的，并且 $\mathscr{A}/J$ 为一个可除代数（且 $|||[e]|||_* = 1$），因此借助 Gelfand-Mazur 定理可得：

推论 4.1

设 $\mathscr{A}$ 为含幺交换 Banach 代数，J 为一个极大理想，则有等距同构 $\mathscr{A}/J \cong \mathbb{C}$.

♡

注 这里的交换性是为了保证 $\mathscr{A}/J$ 为除环.

4.2.2 Gelfand 表示

借助等距同构 $\mathscr{A}/J \cong \mathbb{C}$，可以给出含幺交换 Banach 代数的 Gelfand 表示. 首先根据上一小节的结论，对任意极大理想 J，可以定义（第一个箭头为作商，第二个箭头为同构）

$$\varphi_J : \mathscr{A} \to \mathscr{A}/J \to \mathbb{C}, \quad a \mapsto [a] = z[e] \mapsto z,$$

命题 4.4

设 $\varphi_J : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 如上定义，则它是连续同态，且满足 $\varphi_J(e) = 1, |\varphi_J(a)| \leqslant ||a||$.

♠

证明 对任意 $a, b \in \mathscr{A}, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$，设 $[a] = z_a[e], [b] = z_b[e]$，则 $[\lambda a + \mu b] = (\lambda z_a + \mu z_b)[e], [ab] = z_a z_b[e]$，因此

$$\varphi_J(\lambda a + \mu b) = \lambda z_a + \mu z_b = \lambda\varphi_J(a) + \mu\varphi_J(b),$$
$$\varphi_J(ab) = z_a z_b = \varphi_J(a)\varphi_J(b),$$

进一步，显然 $\varphi_J(e) = 1$，并且 $||\varphi_J(a)|| = ||[a]||_* \leqslant ||a||$.

定义 4.4 (Gelfand 表示)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺交换 Banach 代数，记 $\mathfrak{M}$ 为其极大理想的全体，定义 $\mathscr{A}$ 的 Gelfand 表示为

$$\Gamma : \mathscr{A} \to \{\mathfrak{M} \to \mathbb{C}\}, \quad a \mapsto \{\hat{a} : J \mapsto \varphi_J(a)\}.$$

♣

注 其中 $\{\mathfrak{M} \to \mathbb{C}\}$ 为 $\mathfrak{M}$ 上的复值函数代数（这也是一个交换含幺代数）.

容易验证，Gelfand 表示确实给出了一个代数同态.

命题 4.5

Gelfand 表示 $\Gamma : \mathscr{A} \to \{\mathfrak{M} \to \mathbb{C}\}$ 是一个 $\mathbb{C}$-代数同态.

为了研究 Γ 的分析性质，需要赋予 $\{\mathfrak{M} \to \mathbb{C}\}$ 一个 Banach 代数结构，为此需要定义 $\mathfrak{M}$ 上适当的拓扑——我们希望它是紧的，并且使得所有 $\hat{a}$ 都连续——下面讨论这件事.

4.2.3 Gelfand 拓扑

命题 4.6 (同态泛函的连续性)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺 Banach 代数，则

(1) 若 $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 为非零同态，则 $\varphi(e) = 1, |\varphi(a)| \leqslant ||a||$，特别地 φ 连续.

(2) 若 $\mathscr{A}$ 可交换，则 $a \in G(\mathscr{A})$ 当且仅当对任意非零同态 $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 都有 $\varphi(a) \neq 0$.

证明 (1) $\varphi \neq 0$ 说明 $\varphi(e) \neq 0$，故由 $\varphi(e) = \varphi(e)\varphi(e)$ 可得 $\varphi(e) = 1$. 对任意 $0 \neq a \in \mathscr{A}$，不妨设 $\varphi(a) \neq 0$，首先 $\varphi(\varphi(a)e - a) = 0$ 说明 $\varphi(a)e - a$ 不可逆，进而 $e - \frac{a}{\varphi(a)}$ 不可逆，故 $||a/\varphi(a)|| \geqslant 1$，$|\varphi(a)| \leqslant ||a||$.

(2) 若 $a \in G(\mathscr{A})$ 则 $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = 1$，故 $\varphi(a) \neq 0, \forall \varphi \neq 0$；反之，假设 $a \notin G(\mathscr{A})$，则存在极大理想 $J \ni a$，从而 $\varphi_J(a) = 0$，矛盾.

对于含幺交换 Banach 代数 $\mathscr{A}$，考虑其到 $\mathbb{C}$ 非零同态的全体（前面已经证明了同态 $\mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 必连续）

定义 4.5 (Δ 的定义)

$\Delta := \{\varphi \in \mathscr{A}^* : \varphi(e) = 1, \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \forall a, b \in \mathscr{A}\}$.

对任意 $J \in \mathfrak{M}$，可以考虑映射 $i : \mathfrak{M} \to \Delta, J \mapsto \varphi_J$，接下来分两步走：

(1) 证明 $i : \mathfrak{M} \to \Delta$ 是一个双射.

(2) 构造 Δ 上的紧 Hausdorff 拓扑，将其“迁移”到 $\mathfrak{M}$ 上，并保证所有 $\hat{a} : \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ 连续.

¶ 双射的构造

命题 4.7 ($\mathfrak{M}$ 与 Δ 之间的一一对应)

考虑映射 $i : \mathfrak{M} \to \Delta, J \mapsto \varphi_J$，则它是双射.

证明 单性：若 $\varphi_J = \varphi_I$，则 $J = \operatorname{Ker}\varphi_J = \operatorname{Ker}\varphi_I = I$.

满性：对任意 $\varphi \in \Delta$，$J := \operatorname{Ker}\varphi \in \mathfrak{M}$，则对任意 $a \in \mathscr{A}, [a] := z_a[e] \in \mathscr{A}/J$ 有（注意到 $z_a e - a \in \operatorname{Ker}\varphi$）

$$\varphi_J(a) = z_a = \varphi(z_a e) = \varphi(a),$$

故 $\varphi = \varphi_J = i(J)$.

其中单性的证明用到了如下引理保证：

引理 4.2

设 J 为 $\mathscr{A}$ 的极大理想，则 $\operatorname{Ker}\varphi_J = J$.

证明 显然 $J \subset \operatorname{Ker}\varphi_J$，由极大性以及 $\varphi_J(e) = 1$ 可知 $J = \operatorname{Ker}\varphi_J$.

满性的证明用到了如下引理：

引理 4.3

设 $\varphi : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ 为非平凡同态，则 $\operatorname{Ker}\varphi$ 为 $\mathscr{A}$ 的极大理想.

注 这一命题并不涉及 $\mathfrak{A}$ 的 Banach 代数结构.

证明 首先显然 $\operatorname{Ker}\varphi$ 为 $\mathscr{A}$ 的理想，对任意 $0 \neq [a] \in \mathscr{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ 有 $\varphi(a) \neq 0$，注意到 $\varphi(a-\varphi(a)e)=0$，因此 $[a][e]=[e][a]=[\varphi(a)e]=(\varphi(a))[e], [a]^{-1}=(\varphi(a))^{-1}[e]$，即 $\mathscr{A}/\operatorname{Ker}\varphi$ 为可除代数，$\operatorname{Ker}\varphi$ 为极大理想.

¶ $\mathfrak{M}$ 上的 Gelfand 拓扑

首先考虑 Δ 上的拓扑：

命题 4.8 (Δ 继承 $\mathscr{A}^*$ 的 * 弱拓扑)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺 Banach 代数，则 Δ 为 $\mathscr{A}^*$ 的 * 弱紧 Hausdorff 子空间.

证明 根据遗传性可知 Δ 是 Hausdorff 空间，由 Alaoglu 定理，单位闭球 $S_1 \subset \mathscr{A}^*$ 是 * 弱紧的，而 $\Delta \subset S_1$，因此只需证明其弱 * 闭. 设 $\phi_0 \in \overline{\Delta} \subset S_1$，下面分别证明 $\phi_0(e)=1, \phi_0(ab)=\phi_0(a)\phi_0(b)$.

- 保单位元：对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\Delta \cap (\phi_0+U(1/n;e)) \neq \emptyset$，从中任取 ϕ_n，则 $|1-\phi_0(e)|=|\phi_n(e)-\phi_0(e)|<1/n$，令 $n\to\infty$ 即得.
- 同态：对任意 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\Delta \cap (\phi_0+U(1/n;a,b,ab)) \neq \emptyset$，从中任取 ϕ_n，则
$$\begin{aligned}|\phi_0(ab)-\phi_0(a)\phi_0(b)| &\leqslant |\phi_0(ab)-\phi_n(ab)|+|\phi_n(a)|\,|\phi_n(b)-\phi_0(b)|+|\phi_n(a)-\phi_0(a)|\,|\phi_0(b)| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{n}+|\phi_0(a)|+|\phi_0(b)|\right],\end{aligned}$$
令 $n\to\infty$ 即得.

在上述命题的基础上，借助一开始的等同
$$i:\mathfrak{M}\to\Delta,\quad J\mapsto\varphi_J,$$
可以将 Δ 继承 $\mathscr{A}^*$ 中的 * 弱拓扑迁移到 $\mathfrak{M}$ 上，从而得到一个紧 Hausdorff 空间.

命题 4.9 ($\mathfrak{M}$ 上的 Gelfand 拓扑)

考虑如下形式的集合（$J_0\in\mathfrak{M}, A\subset\mathscr{A}$ 有限）
$$N(J_0;\varepsilon,A):=\{J\in\mathfrak{M}:|\varphi_J(a)-\varphi_{J_0}(a)|<\varepsilon,\forall a\in A\},$$
则它们构成 $\mathfrak{M}$ 上的一个拓扑，使得 $i:\mathfrak{M}\to\Delta$ 为同胚.

有了拓扑结构，可以更进一步研究 Gelfand 表示.

定理 4.2 (Gelfand 表示的连续性)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺交换 Banach 代数，则对任意 $a\in\mathscr{A}$，$\Gamma(a)=\hat{a}$ 为 $\mathfrak{M}$ 上的连续函数，特别地
$$\Gamma:\mathscr{A}\to C(\mathfrak{M}),\quad a\mapsto\{\hat{a}:J\mapsto\varphi_J(a)\}$$
为连续同态.

注 这里 $C(M)$ 上的拓扑即为紧空间上连续函数的一致收敛拓扑，它也是一个 Banach 代数.

证明 对 $\mathbb{C}$ 中的球 $B(\hat{a}(J_0),r)$ 有
$$\hat{a}^{-1}(B(\hat{a}(J_0),r))=\{J\in\mathfrak{M}:|\hat{a}(J)-\hat{a}(J_0)|<r\}=\{J\in\mathfrak{M}:|\varphi_J(a)-\varphi_{J_0}(a)|<r\}=N(J_0;r,a),$$
即 $\hat{a}$ 将任意 $\hat{a}(J_0)$ 的邻域拉回为 J_0 的邻域，故 $\hat{a}:\mathfrak{M}\to\mathbb{C}$ 连续.

进一步有（注意到 Γ 为 Banach 空间之间的映射）$||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})}=\sup_{J\in\mathfrak{M}}|\varphi_J(a)|\leqslant||a||_{\mathscr{A}}$，故 Γ 连续.

4.3 Banach 代数中的谱

本节的讨论有点类似线性算子的谱.

定义 4.6 (Banach 代数中的谱)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺 Banach 代数，$G(\mathscr{A})$ 为其中可逆元的全体，则对任意 $a \in \mathscr{A}$，定义

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - a \notin G(\mathscr{A})\}, \quad \rho(a) := \mathbb{C} \backslash \sigma(a).$$

分别称之为 a 的谱集与预解集.

注 根据定义可知，谱通常都对含幺 Banach 代数讨论.

类似线性算子的谱，同样可以得到一些基本结论：

定理 4.3

设 $\mathscr{A}$ 为含幺 Banach 代数，则对任意 $a \in \mathscr{A}$ 有

(1) $\rho(a)$ 为开集.

(2) $\sigma(a)$ 为非空紧集.

证明 (1) 对任意 $\lambda_0 \in \rho(a), \lambda_0 e - a \in G(\mathscr{A})$，注意到对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有

$$\lambda e - a = (\lambda_0 e - a) - (\lambda_0 - \lambda)e = (\lambda_0 e - a)[e - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 e - a)^{-1}],$$

因此当 $|\lambda - \lambda_0| < ||(\lambda_0 e - a)^{-1}||^{-1}$ 时就有 $\lambda e - a$ 可逆，从而 $\rho(a)$ 为开集.

(2) 由 (1) 可知 $\sigma(a)$ 为闭集，注意到对任意 $|\lambda| > ||a||$ 有 $\lambda e - a = \lambda(e - a/\lambda)$ 可逆，因此 $\sigma(a) \subset \overline{B(0, ||a||)}$，即 $\sigma(a)$ 为紧集（有界闭集）.

进一步证明其非空，若不然假设 $\rho(a) = \mathbb{C}$，考虑函数 $r : \mathbb{C} \to \mathscr{A}, z \mapsto (ze - a)^{-1}$，仿照 Gelfand-Mazur 定理的证明过程可知 $r \equiv 0$（有界弱解析函数，且在无穷远处收敛到 0），矛盾.

定义 4.7 (谱半径)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺 Banach 代数，称 $r(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$ 为 a 的谱半径.

注 显然 $0 < r(a) \leqslant ||a||$.

若假设 $\mathscr{A}$ 交换，那么前面讨论的 Gelfand 表示就有了用武之地.

定理 4.4 (谱集与 Gelfand 表示)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺交换 Banach 代数，则对任意 $a \in \mathscr{A}$ 有

$$\sigma(a) = \{\hat{a}(J) : J \in \mathfrak{M}\} = \mathrm{Ran}(\hat{a}).$$

从而 $r(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = ||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})}$.

注 也就是说，a 的谱集等于 $\hat{a}$ 的值域.

证明 一方面

$$\lambda \in \sigma(a) \Leftrightarrow \lambda e - a \notin G(\mathscr{A}) \Leftrightarrow \exists J \in \mathfrak{M}, \lambda e - a \in J \Leftrightarrow \varphi_J(\lambda e - a) = 0 \Leftrightarrow \hat{a}(J) = \lambda.$$

进一步

$$||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})} = \sup_{J \in \mathfrak{M}} |\hat{a}(J)| = \sup_{\lambda \in \Sigma(a)} |\lambda| = r(a).$$

仿照先前对 $A \in \mathcal{L}(X)$ 中谱半径公式的证明，

定理 4.5 (交换 Banach 代数的谱半径公式)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺交换 Banach 代数，则对任意 $a \in \mathscr{A}$ 有

$$||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})} = \lim_{n \to \infty} ||a^n||^{\frac{1}{n}}.$$

证明 【Step 1. 证明 $||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})} \leqslant \liminf\limits_{n \to \infty} ||a^n||^{\frac{1}{n}}$】

首先断言 $\left(\sup\limits_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|\right)^n=\sup\limits_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|^n$，只需注意到

$$|(\Gamma a)(J)|\leqslant\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|\Rightarrow|(\Gamma a)(J)|^n\leqslant\left(\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|\right)^n\Rightarrow\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|^n\leqslant\left(\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|\right)^n,$$

$$|(\Gamma a)(J)|^n\leqslant\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|^n\Rightarrow\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|\leqslant\left(\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|^n\right)^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\left(\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|\right)^n\leqslant\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|^n.$$

从而

$$||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})}^n=\left(\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|\right)^n=\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a)(J)|^n=\sup_{J\in\mathfrak{M}}|(\Gamma a^n)(J)|=||\Gamma a^n||_{C(\mathfrak{M})}\leqslant||a^n||.$$

移项并取下极限即得.

【Step 2. 证明 $r(a)\geqslant\limsup\limits_{n\to\infty}||a^n||^{\frac{1}{n}}$】

对任意 $f\in\mathscr{A}^*$，考虑 $\rho(a)$ 上的全纯函数 $f((\lambda e-a)^{-1})$，一方面它在 $|\lambda|>r(a)$ 上存在唯一的 Laurent 展开，另一方面在 $|\lambda|>\limsup\limits_{n\to\infty}||a^n||^{\frac{1}{n}}$ 上，容易验证

$$(\lambda e-a)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{\lambda^{n+1}}\Rightarrow f((\lambda e-a)^{-1})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(a^n)}{\lambda^{n+1}},$$

从而这就是它在 $|\lambda|>||\Gamma a||$ 上的 Laurent 展开. 对任意 $\varepsilon>0$，取 $\lambda=r(a)+\varepsilon$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|f(a^n)|}{(r(a)+\varepsilon)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}|f(t_n)|<\infty,\quad t_n:=\frac{a^n}{(r(a)+\varepsilon)^{n+1}},$$

根据一致有界原理可知

$$\sup_n|f(t_n)|=\sup_n|t_n^{**}(f)|<\infty,\forall f\in\mathscr{A}^*\Rightarrow C:=\sup_n||t_n^{**}||=\sup_n||t_n||<\infty,$$

从而

$$||a^n||^{\frac{1}{n}}\leqslant C^{\frac{1}{n}}(r(a)+\varepsilon)^{\frac{n+1}{n}}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}||a^n||^{\frac{1}{n}}\leqslant r(a)+\varepsilon,$$

由 ε 任意性可知 $r(a)\geqslant\limsup\limits_{n\to\infty}||a^n||^{\frac{1}{n}}$.

注 由于已经证明了 $||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})}=r(a)$，因此也可以完全仿照谱半径公式那样证明 $r(a)=\lim\limits_{n\to\infty}||a^n||^{\frac{1}{n}}$.

4.3.1 Gelfand 表示的讨论

对于先前定义的 Gelfand 表示 $\Gamma:\mathscr{A}\to C(\mathfrak{M})$，有一些自然的问题：

- 何时 Γ 为单同态？
- 何时 Γ 为等距单射？
- 何时 Γ 为等距同构？

这里可以回答前两个问题，第三个将在后文中关于 C^* 代数的部分讨论.

定理 4.6 (Γ 单性的刻画)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺交换 Banach 代数，则下述等价：

(1) $\mathscr{A}$ 半单.

(2) $\Gamma:\mathscr{A}\to C(\mathfrak{M})$ 为单同态.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}||a^n||^{\frac{1}{n}}=0$，则 $a=0$.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2)：注意到

$$\Gamma a=0\Leftrightarrow\hat{a}(J)=\varphi_J(a)=0,\forall J\in\mathfrak{M}\Leftrightarrow a\in\bigcap_{J\in\mathfrak{M}}\varphi_J=\bigcap_{J\in\mathfrak{M}}J.$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3)：根据引理立得.

推论 4.2 (Γ 等距单的刻画)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺交换 Banach 代数，则 $\Gamma:\mathscr{A}\to C(\mathfrak{M})$ 为等距单同态当且仅当对任意 $a\in\mathscr{A}$ 有 $||a^2||=||a||^2$. ♡

证明 若 Γ 为等距单同态，则 $||a^2||=||\Gamma a^2||_{C(\mathfrak{M})}=||(\Gamma a)^2||_{C(\mathfrak{M})}=||\Gamma a||^2_{C(\mathfrak{M})}=||a||^2$.

反之若对任意 $a\in\mathscr{A}$ 有 $||a^2||=||a||^2$，则 $||a^{2^k}||=||a||^{2^k}$，从而 $||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})}=\lim\limits_{k\to\infty}||a^{2^k}||^{2^{-k}}=||a||$，说明 Γ 为等距单的.

4.4 一些例子

定理 4.7

设 M 为紧 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}=C(M)$，$\mathfrak{M}$ 为其极大理想的全体，则有同胚 $\mathfrak{M}\cong M$. ♡

证明 考虑映射

$$j:M\to\mathfrak{M},\quad x\mapsto J_{x_0}:=\{f\in C(M):f(x_0)=0\},$$

【Step 1. 证明 j 单】

若 $x_0\neq x_1$，则由 Urysohn 引理，存在 $f\in C(M)$ 使得 $f(x_0)=0,f(x_1)=1$，从而 $f\in J_{x_0},f\notin J_{x_1}$，即 $J_{x_1}\neq J_{x_0}$.

【Step 2. 证明 j 满】

设 $J\in\mathfrak{M}$，若对任意 $x\in M$ 都有 $J\neq J_x$，则存在 $f_x\in J,f_x\notin J_x$（即 $f_x(x)\neq 0$），对任意 $x\in M$，取其开邻域 U_x 使得 $f_x|_{U_x}\neq 0$，则这些 $\{U_x:x\in M\}$ 构成 M 的开覆盖，从而有有限子覆盖 $U_1,\cdots,U_n$，因此可构造

$$f(x)=\sum_{i=1}^n\bar{f}_i(x)f_i(x)\in J,$$

但 $f\neq 0$（任意 $x\in M$ 都恰好在某个 U_i 中，则 $f(x)\geqslant|f_i(x)|>0$），因此 $f\in G(\mathscr{A})$，这与 J 为极大理想矛盾.

【Step 3. 证明 j 为同胚】

由于 j 为从紧空间到 Hausdorff 空间的双射，因此只需证明其连续性. 设 $j(x_0)=J_{x_0}$，任取 J_{x_0} 的邻域

$$U(\varepsilon,f_1,\cdots,f_n)=\{J_x\in\mathfrak{M}:|\varphi_J(f_i)-\varphi_{J_{x_0}}(f_i)|<\varepsilon,i=1,\cdots,n\},$$

注意到这时 $\varphi_{J_x}:C(M)\to\mathbb{C}$ 恰好为 x 处的赋值映射，故

$$j^{-1}(U(\varepsilon,f_1,\cdots,f_n))=\{x\in M:|f_i(x)-f_i(x_0)|<\varepsilon,i=1,\cdots,n\}=\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(B(f_i(x_0),\varepsilon)),$$

由每个 f_i 的连续性可知上述集合为开集.

4.5 C^* 代数

4.5.1 C^* 代数

定义 4.8 (对合)

设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbb{C}$-代数，若映射 $*:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$ 满足：

(1) $(a+b)^*=a^*+b^*$.

(2) $(\lambda a)^*=\bar{\lambda}a^*$.

(3) $(ab)^*=b^*a^*$.

(4) $(a^*)^*=a$.

则称之为 $\mathscr{A}$ 上的一个对合. ♣

注 这些要求可以概括为共轭线性性、反变性、对合性.

从定义可以看出，对合与像复数域上的共轭、复矩阵空间的共轭转置有很多相似之处.

定义 4.9 (Hermite 元（自伴元）)

设 $\mathscr{A}$ 为一个带有对合 $*$ 的 $\mathbb{C}$-代数，若 $a \in \mathscr{A}$ 满足 $a^* = a$，则称之为 $\mathscr{A}$ 中的一个自伴元. ♣

定义 4.10 (C^* 代数)

设 $\mathscr{A}$ 为含幺 Banach 代数，有对合 $*$，若对任意 $a \in \mathscr{A}$ 有 $||a^*a|| = ||a||^2$，则称之为一个 C^* 代数. ♣

引理 4.4

设 $\mathscr{A}$ 为 C^* 代数，$a \in \mathscr{A}$，则

(1) $a + a^*, i(a - a^*), aa^*$ 均为 Hermite 元.

(2) 单位元 e 是 Hermite 元.

(3) 有唯一分解 $a = u + iv$，其中 u, v 均为 Hermite 元.

(4) $a \in G(\mathscr{A})$ 当且仅当 $a^* \in G(\mathscr{A})$，并且此时 $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$.

(5) $\lambda \in \sigma(a)$ 当且仅当 $\bar{\lambda} \in \sigma(a^*)$. ♡

引理 4.5

设 $\mathscr{A}$ 为 C^* 代数，$a \in \mathscr{A}$，则

(1) $||a^*|| = ||a||$.

(2) 若 a 自伴，则 $||a^2|| = ||a||^2$. ♡

定义 4.11 ($*$ 同态)

设 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ 为 C^* 代数，$\phi : \mathscr{A}_1 \to \mathscr{A}_2$ 满足

(1) ϕ 为代数同态.

(2) $\phi(a^*) = (\phi(a))^*$.

(3) $||\phi(a)|| \leqslant ||a||$.

则称 ϕ 为一个 $*$ 同态. ♣

注 注意到 C^* 代数中 Hermite 元 a 满足 $r(a) = ||a||$，因此对任意满足前两条的 ϕ 有（同态不增加谱半径）

$$||\phi(a)||^2 = ||\phi(a)^*\phi(a)|| = ||\phi(a^*a)|| = r(\phi(a^*a)) \leqslant r(a^*a) = ||a^*a|| = ||a||^2,$$

从而第三条（连续性）是多余的.

已知对任意 Banach 空间 X，$\mathcal{L}(X)$ 为 Banach 代数；而对于 C^* 代数，它的动机恰好来源于 Hilbert 空间上的有界线性算子代数.

定理 4.8

设 H 为 Hilbert 空间，则 $\mathcal{L}(H)$ 关于取共轭 $*$ 构成一个 C^* 代数，并且其任意对 $*$ 封闭的闭子代数都是它的 C^* 子代数. ♡

证明 由对称算子的性质可得

$$||A^*A|| = \sup_{||x||=1} |\langle A^*Ax, x\rangle| = \sup_{||x||=1} |\langle Ax, Ax\rangle| = \sup_{||x||=1} ||Ax||^2 = ||A||^2.$$

事实上，它反过来也是对的，即任意 C^* 代数 $*$ 等距同构于某个 $\mathcal{L}(H)$ 的闭 C^* 代数. 下面仅考虑交换情形，此时 Gelfand 表示恰好给出了一个同构.

4.5.2 Gelfand-Naimark 定理

引理 4.6 (Arens)

设 $\mathscr{A}$ 为交换 C^* 代数且 $a \in \mathscr{A}$ 为 Hermite 元，则 $\Gamma a = \hat{a}$ 为 $C(\mathfrak{M})$ 上的实值函数.

证明 设 a 为 Hermite 元，$J \in \mathfrak{M}$，设 $\varphi_J(a) = \hat{a}(J) = u + vi$，考虑 $a + ite$，则

$$\begin{aligned}|u|^2 + |v+t|^2 = |u+iv+it|^2 = |\varphi_J(a+ite)|^2 \\ \leqslant ||(a+ite)||^2 = ||(a-ite)(a+ite)|| = ||a^2+t^2e|| \leqslant ||a||^2 + t^2,\end{aligned}$$

由此可得 $u^2+v^2+2vt \leqslant ||a||^2$，由 t 任意性可知 $v = 0$，即 $\hat{a}(J) \in \mathbb{R}$.

证明 Gelfand-Naimark 定理的关键是 Stone-Weierstrass 定理（证明在附录给出）.

定理 4.9 (Stone-Weierstrass: complex case)

设 M 为紧空间，$\mathscr{A}$ 为 $C(M)$ 的闭子代数，满足

(1) $\mathscr{A}$ 包含单位元.

(2) $\mathscr{A}$ 对（函数）共轭封闭.

(3) 对任意 $x \neq y \in M$，存在 $f \in \mathscr{A}$ 使得 $f(x) \neq f(y)$.

则 $\mathscr{A} = C(M)$.

定理 4.10 (Gelfand-Naimark)

设 $\mathscr{A}$ 为交换 C^* 代数，则 $\Gamma : \mathscr{A} \to C(\mathfrak{M})$ 是一个 $*$ 等距同构，即

(1) 保对合：$\Gamma(a^*) = \overline{\Gamma(a)}$.

(2) 等距：$||\Gamma a||_{C(\mathfrak{M})} = ||a||$.

(3) 单性：Γ 为单射.

(4) 满性：Γ 为满射.

证明 (1) 考虑自伴分解 $a = u + iv$，则由 Arens 引理可得

$$\Gamma(a^*) = \Gamma(u - iv) = \Gamma u - i\Gamma V = \overline{\Gamma u + i\Gamma v} = \overline{\Gamma(a)}.$$

(2)(3) 注意到此时对任意 $a \in \mathscr{A}$ 有（用到了 $\mathscr{A}$ 的交换性）

$$||a^2||^2 = ||(a^2)^*(a^2)|| = ||(a^*a)(a^*a)||^2 = ||a^*a||^2 = ||a||^4 \Rightarrow ||a^2|| = ||a||^2,$$

因此由推论4.2 可得 Γ 是等距单射.

(4) 显然 $\Gamma(\mathscr{A})$ 为 $C(\mathfrak{M})$ 的包含单位元的闭子代数（连续 + 等距推出闭），且由 (1) 知它对复共轭封闭，只需验证 $\Gamma(\mathscr{A})$ 对 $\mathfrak{M}$ 中的点有分离性，从而根据 Stone-Weierstrass 定理可知 $\Gamma(\mathscr{A}) = C(\mathfrak{M})$.

对任意 $I \neq J \in \mathfrak{M}$，存在 $a \in I, a \notin J$，因此 $\hat{a}(I) = \varphi_I(a) = 0, \hat{a}(J) = \varphi_J(a) \neq 0$，即 Γa 分离 I, J，得证.

附录 A 附录

A.1 度量空间

¶ 闭集与紧致集合

主要考虑紧致集合与 Heine-Borel 性质之间的关系，H-B 性质有两种定义方法，可以证明它们是等价的

定义 A.1 (Heine-Borel 性质)

称度量空间 (M,d) 的子集 A 具有 Heine-Borel 性质，若满足如下任意一条

1. 对任意 M 中的开集构成的开覆盖 $\mathcal{B}$，存在 A 的有限子覆盖 $\mathcal{B}'$.
2. 对任意 A 中的（相对）开集构成的开覆盖 $\mathcal{B}$，存在 A 的有限子覆盖 $\mathcal{B}'$.

♣

引理 A.1

任意紧致度量空间存在至多可数稠密子集.

♡

证明 设 (M,d) 为紧致度量空间，首先证明，对任意 $\varepsilon>0$，存在有限个点 $x_1,\cdots,x_N$ 满足

$$M=\bigcup_{k=1}^{N}B_\varepsilon(x_k) \tag{A.1}$$

若不然，假设 ε_0 使得上式不成立，则任取 $x_1\in M$，$x_2\in M-B_{\varepsilon_0}(x_1)$，$x_3\in M-(B_{\varepsilon_0}(x_1)\cup B_{\varepsilon_0}(x_2))$，以此类推，得到点列 $\{x_k\}$ 满足

$$x_{n+1}\in M-\left(\bigcup_{k=1}^{N}B_{\varepsilon_0}(x_k)\right), \tag{A.2}$$

这个点列满足 $d(x_j,x_k)\geqslant\varepsilon_0$，因此没有极限点，矛盾.

根据上面的结果，令 $\varepsilon=1/n$，则每个 $1/n$ 都有有限点集 A_n 满足上面的性质，因此 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 就是 M 的至多可数稠密子集.

定理 A.1

度量空间 (M,d) 紧致当且仅当它具有 Heine-Borel 性质.

♡

证明 设 M 具有 H-B 性质，则只需要证明 M 中任意点列 $\{x_k\}$ 有极限点，不妨设其两两不同，假设某个点列不存在极限点，则其任意子集均无聚点，因此都是闭集，下面构造一个与 H-B 性质矛盾的开覆盖：

$$B_1=M-\{x_1,x_2,\cdots\} \tag{A.3}$$

$$B_2=M-\{x_2,x_3\cdots\} \tag{A.4}$$

$$\cdots \tag{A.5}$$

$$B_k=M-\{x_k,x_{k+1}\cdots\} \tag{A.6}$$

显然 $\{B_k\}$ 是 M 的开覆盖，但它没有有限子覆盖，与 H-B 性质矛盾.

反之设 M 紧致，首先证明其任意开覆盖 $\mathcal{B}$ 有可数子覆盖，再证明其有有限子覆盖. 根据上述引理，设 $x_1,x_2,\cdots$ 是 M 的可数稠密子集，考虑可数集合 $\{B_{1/m}(x_n):m,nin\mathbb{N}\}$，任取开球 $B_{1/m}(x_n)$，若集合

$$\{B\in\mathcal{B}:B\supset B_{1/m}(x_n)\} \tag{A.7}$$

非空，则从中任取一个 B 放入集族 $\mathcal{B}_1$，这样最后得到的集族 $\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$ 是可数的，再证其覆盖 M. 任取 $x\in M$，存在开集 $B\in\mathcal{B}$ 包含 x，则必然存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $B_{2/m}(x)\subset B$，根据点列的稠密性可以选取某个 x_n 使得

$x \in B_{1/m}(x_n)$，根据三角不等式可知

$$x \in B_{1/m}(x_n) \subset B_{2/m}(x) \subset B \tag{A.8}$$

由 $\mathcal{B}_1$ 的构造过程可知存在 $B_1 \in \mathcal{B}_1$，它包含 x.

设 $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ 为 M 的可数子覆盖，假设其无有限子覆盖，则构造点列 $\{x_k\}$ 使得

$$x_k \in M - \left(\bigcup_{k=1}^{k} B_k\right) \tag{A.9}$$

由紧致性设该点列的极限点 $x \in M$，则存在包含 x 的 B_N 以及子列 x_{n_k}，当 k 充分大时就有 $x_{n_k} \in B_N$，与构造矛盾.

¶ 度量空间的连续函数

定义 A.2

设 $(M, d_M), (N, d_N)$ 是两个度量空间，$f: M \to N$，下列条件之一成立时称 f 是连续函数：

1. 距离定义：对任意 $x_0 \in M$，$\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，对任意 $d_M(x, x_0) < \delta$，都有 $d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
2. 点列定义：对任意收敛点列 $\{x_k\} \subset M$，对应的像点列 $\{f(x_k)\} \subset N$ 也收敛.
3. 拓扑定义：N 中任意开子集 B 的原像 $f^{-1}(B)$ 是 M 的开子集.

♣

下面证明：上述三种定义是等价的，只要证明 $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$.

证明 $1 \Rightarrow 2$:

设 $\{x_k\} \subset M$，$x_k \to x$，可知对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $d(x, x_k) < \delta$ 时就有 $d(f(x), f(x_k)) < \varepsilon$，而当 k 充分大时必有 $d(x, x_k) < \delta$，因此 $\{f(x_k)\} \subset M$ 收敛，且 $f(x_k) \to f(x)$.

$2 \Rightarrow 3$:

设 $A \subset N$ 开，任取 $x \in f^{-1}(A)$，只需证明存在 $r > 0$，使得 $B_r(x) \subset f^{-1}(A)$，若不然，则对任意 $r = 1/n$，都有点 $x_n \in B_{1/n}(x) - f^{-1}(A)$，由此得到一个收敛到 x 的点列 $\{x_k\}$，由 2 知 $f(x_k) \to f(x) \in A$，由于 A 为开集，故存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B_\varepsilon(f(x)) \subset A$，而当 k 充分大时 $f(x_k) \in B_\varepsilon(f(x))$，这与 x_k 的取法矛盾（$f(x_k) \in f(B_{1/k} - f^{-1}(A)) \notin A$）.

$3 \Rightarrow 1$:

设 $x \in M$，对任意 $\varepsilon > 0$，$f^{-1}(B_\varepsilon(x)) \subset M$ 为开集，由此存在 $\delta > 0$，使得 $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$，将此转化为距离语言即得.

A.2 弱 * 拓扑与弱 * 收敛

在正文中提到了赋范空间 X 上的弱收敛与其对偶空间 X^* 上的弱 * 收敛（也称 * 弱收敛），下面简要整理它们的一些拓扑性质.

定义 A.3 (弱拓扑)

设 X 为赋范空间，称其上使得所有 X^* 中的映射都连续的最弱的拓扑为 X 上的弱拓扑.

♣

定义 A.4 (* 弱拓扑)

设 X 为赋范空间，称 X^* 上使所有赋值映射 $\mathrm{ev}_x: X^* \to \mathbb{C}$ 都连续的最弱的拓扑为 X^* 上的 * 弱拓扑.

♣

注 该拓扑由子基 $\bigcup_{z \in \mathbb{C}} \{\mathrm{ev}_x^{-1}(B(z, r)) : z \in \mathbb{C}, r > 0\}$ 生成，其中 $\mathrm{ev}_x^{-1}(B(z, r)) = \{f \in X^* : |f(x) - z| < r\}$，若记

$$U(\varepsilon; x_1, \cdots, x_n) := \{f \in X^* : |f(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\},$$

则容易验证（可能需要用到 Hahn-Banach 定理）这种集合的构成 $0 \in X^*$ 在 * 弱拓扑下的邻域基，通过平移可以平移构成该拓扑的基.

下面的命题说明了 * 弱拓扑与 * 弱收敛的关系.

命题 A.1 (* 弱拓扑刻画 * 弱收敛)

设 $\{f_n\} \subset X^*$，则在 * 弱拓扑下 f_n 收敛到 f 当且仅当 $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

注 类似也可以证明弱拓扑刻画了弱收敛.

证明 若 f_n 拓扑收敛到 f，则对任意 $x \in X$，根据 ev_x 的连续性可知 $f_n(x) = \mathrm{ev}_x(f_n) \to \mathrm{ev}_x(f) = f(x)$.

反之若 $f_n \xrightarrow{w^*} f$，则对任意邻域 $A \ni f$，取 $f \in U(\varepsilon; x_1, \cdots, x_m) \subset A$，则根据 $f_i(x_m) \to f(x_m)$ 可知存在 n 使得对任意 $k > n$ 都有 $f_k \in U(\varepsilon; x_1, \cdots, x_m) \subset A$，即 f_n 拓扑收敛到 f.

上述命题也表明，“弱列紧”“弱 * 列紧”实际上就是对应拓扑下的列紧性.

命题 A.2

设 X 为赋范空间，则 X^* 在 * 弱拓扑下构成拓扑向量空间.

引理 A.2 (弱拓扑与 * 弱拓扑的 Hausdorff 性)

设 X 为赋范空间，则 X^* 在其 * 弱拓扑下构成 Hausdorff 空间.

注 类似可证 X 在弱拓扑下也构成 Hausdorff 空间.

证明 设 $\varphi \neq \psi \in X^*$，则存在 $x_0 \in X$ 使得 $\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$，取 $0 < \varepsilon \leqslant |\varphi(x_0) - \psi(x_0)|/2$，则

$$(\varphi + U(\varepsilon; x_0)) \cap (\psi + U(\varepsilon; x_0)) = \emptyset$$

否则存在 $\varphi_1, \varphi_2 \in U(\varepsilon; x_0)$ 使得 $\varphi + \varphi_1 = \psi + \varphi_2$，从而有矛盾：

$$2\varepsilon < |\varphi(x_0) - \psi(x_0)| = |\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)| \leqslant |\varphi_1(x_0)| + |\varphi_2(x_0)| < 2\varepsilon.$$

引理 A.3 (紧性的“固有”性)

设 X 为拓扑空间，$A \subset B \subset X$，则 A 为 X 的紧集当且仅当它是 B（取子空间拓扑）的紧集.

注 也就是说，任何“相对紧集”一定是紧的（但是一般相对开/闭集不一定是开/闭的）.

定理 A.2 (Alaoglu)

设 X 为赋范空间，则 X^* 中的单位闭球 $S = \{f \in X^* : ||f|| \leqslant 1\}$ 是弱 * 紧的.

证明 对任意 $x \in X$，记 $Y_x := \mathbb{C}$，考虑乘积空间 $Y = \prod_{x \in X} Y_x$ 以及单射（单性是显然的）

$$\tau : X^* \to Y, \quad f \mapsto \{f(x)\}_{x \in X}.$$

目标是通过嵌入，在 Y 中证明 $\tau(S)$ 的紧性，这将首先证明：

- τ 为闭嵌入.
- $S \subset X^*$ 闭（从而 $\tau(S) \subset Y$ 闭）.

注意到 $\tau(S) \subset \prod_{x \in X} \overline{B(0, ||x||)} := \widetilde{Y}$ 且后者为闭紧集（Tychonoff + Y 的 Hausdorff 性），从而 $\tau(S)$ 作为紧空间的闭子集是紧的，借助 τ 可知 S（在弱 * 拓扑下）紧.

【Step 1. 证明 τ 连续】

设 $\tau(f) = \{f(x)\}_{x \in X}$，则对 $\{f(x)\}_{x \in X} \in Y$ 的任意邻域子基 $B_x(f(x), \varepsilon)$（这表示 Y 的仅在 x 分量上为开球，其余均为 $\mathbb{C}$ 的开子集）有

$$\tau^{-1}(B_x(f(x), \varepsilon)) = \{g \in X^* : |g(x) - f(x)| < \varepsilon\} = f + U(\varepsilon; x),$$

得证.

【Step 2-1. 证明 τ 为嵌入，即 $\tau^{-1}:\tau(X^*)\to X^*$ 连续.】

设 $\tau(f)=\{f(x)\}_{x\in X}$，则对 $f\in X^*$ 的任意邻域子基 $U(\varepsilon;x_0)$ 有

$$\tau(U(\varepsilon;x_0))=\{\{g(x)\}_{x\in X}\in Y:g\in X^*,|g(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon\}=B_{x_0}(g(x),\varepsilon)\cap\tau(X^*).$$

【Step 2-2. 证明 $\tau(X^*)\subset Y$ 闭.】

任取 $\{z_x\}_{x\in X}\in\overline{\tau(X^*)}$，则对 $\{z_x\}_{x\in X}$ 的任意邻域 O 都有 $O\cap\tau(X^*)\neq\emptyset$. 下证 $\{z_x\}_{x\in X}\in\tau(X^*)$，这相当于是说可以通过 $x\mapsto z_x$ 给出的映射 $f:X\to\mathbb{C}$ 确实为 X^* 中的元素.

- 数乘：对任意 $\lambda\in\mathbb{C},x\in X,\varepsilon>0$，则存在 $g\in B_x(z_x,\varepsilon)\times B_{\lambda x}(\lambda x,\varepsilon)\cap\tau(X^*)$，因此
$$|z_{\lambda x}-\lambda z_x|\leqslant|z_{\lambda x}-g(\lambda x)|+|\lambda|\,|g(x)-z_x|\leqslant(1+|\lambda|)\varepsilon,$$
由 ε 任意性可知 $z_{\lambda x}=\lambda z_x$.
- 加法：类似上面，自证不难.
- 连续性：任取 $\{x_n\}\subset X,x_n\to 0$，需证 $z_{x_n}\to 0$，对任意 $n\in\mathbb{N},\varepsilon>0$，存在 $g_\varepsilon\in B_{x_n}(z_{x_n},\varepsilon)$，即 $|g_\varepsilon(x_n)-z_{x_n}|\leqslant\varepsilon$，由此可得
$$|z_{x_n}|\leqslant\varepsilon+|g_\varepsilon(x_n)|\Rightarrow\limsup_{n\to\infty}|z_{x_n}|\leqslant\varepsilon,$$
由 ε 任意性可知 $z_{x_n}\to 0$.

【Step 3. 证明 $S\subset X^*$ 闭.】

任取 $f\in\overline{S}^{w*}$，则对其任意邻域 O 都有 $O\cap S\neq\emptyset$，对任意 $\varepsilon>0,||x||=1$，存在 $g\in(f+U(\varepsilon;x))\cap S$，即 $|f(x)-g(x)|\leqslant\varepsilon$，由此可得 $|f(x)|\leqslant|g(x)|+\varepsilon\leqslant 1+\varepsilon$，由 x,ε 的任意性可知 $||f||\leqslant 1$，即 $f\in S$.

A.3 Stone-Weierstrass 定理

本节证明在前文用到的 Stone-Weierstrass 定理.

定理 A.3 (Ston-Weierstrass: real case)

设 M 为紧空间，$\mathscr{B}$ 为 $C(M)_r$ 的闭子代数，满足

(1) $\mathscr{B}$ 包含单位元.

(2) 对任意 $x\neq y\in M$，存在 $f\in\mathscr{B}$ 使得 $f(x)\neq f(y)$.

则 $\mathscr{B}=C(M)_r$.

注 事实上，满足这种分离性质的 M 一定是 Hausdorff 的.

证明 【Step 1. 准备工作：证明 $\mathscr{B}$ 对 $\max,\min$ 封闭】

注意到

$$\max\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|),\quad\min\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

只需证明对任意 $f\in\mathscr{B}$ 有 $|f|\in\mathscr{B}$. 记闭区间 $[a,b]=[-||f||,||f||]$，由 Weierstrass 逼近定理，存在 $[a,b]$ 上的多项式函数 $P_n(t)$ 逼近 $g(t)=|t|$，因此 $P_n(f(x))\in\mathscr{B}$ 在 M 上也逼近 $g(f(x))=|f(x)|$，由 $\mathscr{B}$ 的闭性即得 $|f|\in\mathscr{B}$.

【Step 2. 证明 $\mathscr{B}\subset C(M)_r$ 稠密】

任取 $h\in C(M)_r,\varepsilon>0$，下面构造 $f\in\mathscr{B}$ 使得 $||f-h||<\varepsilon$.

对任意 $x,y\in M$，若 $x=y$ 则令 $f_{xy}(z)\equiv h(x)$；若 $x\neq y$ 则必然存在 $g\in\mathscr{B}$ 使得 $g(x)\neq g(y)$，此时令

$$f_{xy}(z)=\frac{g(x)-g(z)}{g(x)-g(y)}h(y)+\frac{g(z)-g(y)}{g(x)-g(y)}h(x),$$

从而对任意 $x,y\in M$ 有 $f_{xy}\in\mathscr{B}$（因为它包含单位元）且 $f_{xy}(x)=h(x),f_{xy}(y)=h(y)$.

固定 $x\in M$，对于任意 f_{xy}，由连续性，对任意 $\varepsilon>0$，存在 y 的开邻域 V_y 使得

$$f_{xy}(z)-h(z)>-\varepsilon,\quad\forall z\in V_y,$$

这些 $\{V_y : y \in M\}$ 构成 M 的开覆盖，从而有有限子覆盖 $V_1, \cdots, V_n$，令 $f_x = \max\{f_{xy_1}, \cdots, f_{xy_n}\}$ 则有

$$f_x(z) - h(z) \geqslant \max\{f_{xy_1}(z) - h(z), \cdots, f_{xy_n}(z) - h(z)\} > -\varepsilon.$$

类似由连续性，对任意 $x \in M$，存在 x 的开邻域 U_x 使得

$$f_x(z) - h(z) < \varepsilon, \quad \forall z \in U_x,$$

因此借助同样的手法，取 min 可得 $f \in \mathscr{B}$（封闭性），它满足

$$-\varepsilon < f(z) - h(z) < \varepsilon, \forall z \in M \Rightarrow ||f - h|| < \varepsilon,$$

因此由 ε 的任意性可知 $\mathscr{B} = \overline{\mathscr{B}} = C(M)_r$，得证.

定理 A.4 (Stone-Weierstrass: complex case)

设 M 为紧空间，$\mathscr{A}$ 为 $C(M)$ 的闭子代数，满足
(1) $\mathscr{A}$ 包含单位元.
(2) $\mathscr{A}$ 对（函数）共轭封闭.
(3) 对任意 $x \neq y \in M$，存在 $f \in \mathscr{A}$ 使得 $f(x) \neq f(y)$.
则 $\mathscr{A} = C(M)$.

证明 设 $\mathscr{B} = \mathscr{A} \cap C(M)_r$，则它是 $C(M)_r$ 的包含单位元的闭子代数，对任意 $x \neq y \in M$，存在 $f = g + ih \in \mathscr{A}$ 使得 $f(x) \neq f(y)$（其中 $g, h \in C(M)_r$），因此必有 $g(x) \neq g(y)$ 或 $h(x) \neq h(y)$ 成立，而 $g = \frac{1}{2}(f + \bar{f}), h = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in \mathscr{B}$，因此 $\mathscr{B}$ 也有分离性质，从而由实情形可得

$$\mathscr{B} = C(M)_r \Rightarrow \mathscr{A} \supset \mathscr{B} + i\mathscr{B} = C(M)_r + iC(M)_r = C(M),$$

得证.

事实上，上述结论还可以推广到局部紧情形，推广的思路是考虑“紧支函数”与一点紧化.

定义 A.5

设 X 为局部紧空间，$f \in C(X, \mathbb{R})$，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在紧集 $D_\varepsilon \subset X$ 使得 $|f(x)| < \varepsilon, \forall x \notin D_\varepsilon$，则称它“在无穷远处为 0”，记这种函数的全体为 $C_\infty(X)$.

定义 A.6 (一点紧化)

设 $(X, \mathcal{T})$ 为 Hausdorff 空间，定义 $X_+ = X \cup \{\infty\}$ 上的拓扑

$$\mathcal{T}_+ := \tau \cup \{X_+ - K : K \ compact \ in \ X\},$$

称 $(X_+, \mathcal{T}_+)$ 为 X 的一点紧化空间.

注 Hausdorff 性是必要的，否则 $\mathcal{T}_+$ 未必是一个拓扑.

命题 A.3

设 X 为非紧 Hausdorff 空间，则 (1) $X \hookrightarrow X_+$ 为嵌入.
(2) $X \subset X_+$ 稠密.
(3) X_+ 为一个紧空间.
(4) 若 X 还是局部紧的，则 X_+ 是 Hausdorff 空间.

证明 (1) 注意到对任意 $O \in \mathcal{T}_+$，$O - \{\infty\} \in \mathcal{T}$，因此 $X \hookrightarrow X_+$ 为嵌入.

(2) 任取 ∞ 的开邻域 $X_+ - K$，则 X 非紧说明 $K \neq X$，因此 $(X_+ - K) \cap X \neq \emptyset$，得证.

(3) 设 $\{O_\alpha\}$ 为 X_+ 的开覆盖，则存在某个 $O_{\alpha_0} = X_+ - K$ 包含 ∞，同时 $\{O_\alpha - \{\infty\} : \alpha \neq \alpha_0\}$ 为 K 的开覆盖，它存在有限子覆盖 $\{O_1 - \{\infty\}, \cdots, O_n - \{\infty\}\}$，从而 $\{O_{\alpha_0}, O_1, \cdots, O_n\}$ 即为 $\{O_\alpha\}$ 的有限子覆盖，说明 X_+ 紧.

(4) 只需验证 $x \in X \subset X_+$ 与 ∞ 可分离. 由局部紧可取 x 的预紧开邻域 K，则 $K, X_+ - \overline{K}$ 分离 x, ∞.

引理 A.4

设 X 为 Hausdorff 空间，X_+ 为其一点紧化，则
(1) 对任意 $f \in C_\infty(X)$，可可将其零延拓为 $\tilde{f} \in C(X_+)_r$. 特别当 X 非紧时，该延拓是唯一的.
(2) 反之若 $g \in C(X_+)_r$ 且 $g(\infty) = 0$，则必然存在 $f \in C_\infty(X)$ 使得 $g = \tilde{f}$.

注 换句话说，对于非紧 Hausdorff 空间 X，零延拓与限制给出了 $\mathbb{R}$-代数同构 $C_\infty(X) \cong \{f \in C(X_+)_r : f(\infty) = 0\}$.

证明 (1) 设 $f \in C_\infty(X)$，只需证明 $\tilde{f}$ 在 ∞ 处连续，任取 $0 \in \mathbb{R}$ 的开邻域 $(-\varepsilon, \varepsilon)$，存在 X 的紧集 D_ε 使得对任意 $x \in X - D_\varepsilon$ 有 $|f(x)| < \varepsilon$，即 $\tilde{f}^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon) \supset X_+ - D_\varepsilon$，得证. 若 X 非紧，则

(2) 取 $f = g|_X$ 即可（$X \hookrightarrow X_+$ 为嵌入保证了 f 的连续性，g 在 ∞ 的连续性保证了 $f \in C_\infty(X)$）.

定理 A.5

设 X 为局部紧空间，$\mathscr{A}$ 为 $C_\infty(X)$ 的闭子代数，若 $\mathscr{A}$ 分离 X 中的点，并且对任意 $x \in X$，存在 $f \in \mathscr{A}$ 满足 $f(x) \neq 0$，则 $\mathscr{A} = C_\infty(X)$.

注 同样的，分离性蕴含了 X 是 Hausdorff 的.

证明 记 $X_+ = X \cup \{\infty\}$ 为 X 的一点紧化，令（$\tilde{f}$ 为 $f \in C_\infty(M)$ 的零延拓）

$$\mathscr{A}' := \{\tilde{f} + r : f \in \mathscr{A}, r \in \mathbb{R}\} \subset C(X_+)_r,$$

下面验证 $\mathscr{A}'$ 满足 Stone-Weierstrass 定理的条件，从而有 $\mathscr{A}' = C_(X_+)_r$，再通过零延拓证明 $\mathscr{A} = C_\infty(X)$.

【Step 1. 证明 $\mathscr{A}'$ 为 $C(X_+)_r$ 的包含单位元的闭子代数，且有分离性质】

显然 $\mathscr{A}'$ 为子代数且 $1 = 0 + 1 \in \mathscr{A}'$，下证闭. 若 $\tilde{f}_n + r_n \to g \in C(X_+)_r$，则它必然在 ∞ 处收敛，即

$$\tilde{f}(\infty) + r_n = r_n \to g(\infty),$$

从而

$$||\tilde{f}_n - (g - g(\infty))|| \leqslant ||\tilde{f} + r_n - g|| + |r_n - g(\infty)| \to 0,$$

这说明 $\tilde{f}_n \to g - g(\infty)$，其极限在 ∞ 处取 0，因此存在 $h \in C_\infty(X)$ 使得 $\tilde{h} = g - g(\infty)$，从而 $\tilde{f}_n + r_n \to \tilde{h} + g(\infty) \in \mathscr{A}'$，故其闭.

再说明分离性，若 $x, y \in X \subset X_+$ 则取 $\mathscr{A}$ 中的分离函数，零延拓即得；若 $x \in X \subset X_+, \infty \in X_+$，则由条件可知存在 $f \in \mathscr{A}$ 使得 $f(x) \neq 0$，零延拓即得.

【Step 2. 由实 Stone-Weierstrass 定理可知 $\mathscr{A}' = C(X_+)_r$】

【Step 3. 证明 $\mathscr{A} = C_\infty(X)$】

任取 $f \in C_\infty(X)$，零延拓为 $\tilde{f} \in C(X_+)_r$，从而存在 $g \in \mathscr{A}, r \in \mathbb{R}$ 使得 $\tilde{f} = \tilde{g} + r$（Step 2），即对任意 $x \in X$ 有 $f(x) - g(x) = r$，但对任意 $\varepsilon > 0$，可取紧集 D_ε 使得对任意 $x \notin D_\varepsilon$ 有 $|f(x)|, |g(x)| < \varepsilon$，因此 $|r| < 2\varepsilon$，由任意性可知 $r = 0$，因此 $f = g \in \mathscr{A}$，得证.